



上海重点高中标准题 · 咩咩一顿刷

高中数学 第9章

慕课 & 思度

校稿 UyNehc



第9章 复数

9.1 复数及其四则运算

第①课时 复数的引入与复数的四则运算

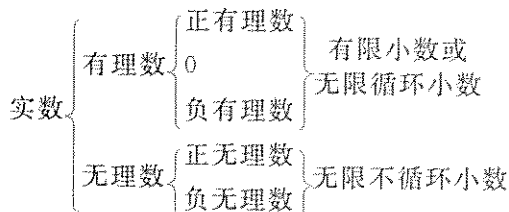
学习目标

1. 结合方程 $x^2+1=0$ 的解, 引入新数 i , 规定 $i^2=-1$, 知道 1 是实数的一个单位, i 是虚数的一个单位.
2. 掌握复数的四则运算.
3. 理解两个复数相等的充要条件.

温故知新

知识链接

1. 数集间的关系



2. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 x^2 _____ 0.

预习导学

1. 虚数单位

i 叫做虚数单位, 规定 $i^2=-1$, 即 i 是 -1 的一个平方根.

2. 复数的概念

形如 _____ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫做复数

注意: (1) 当以后说到复数 $a+bi$ 时, 如果不做特殊说明, 那么都有 $a, b \in \mathbf{R}$.

(2) 复数全体组成的集合叫做复数集, 一般用字母 $\mathbf{C}$ 表示.

(3) 定义了复数的加法和乘法运算后的复数集叫做复数系(域).

3. 复数相等

如果两个复数 $z_1=a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 和 $z_2=c+di$ ($c, d \in \mathbf{R}$) 的 _____ 与 _____ 分别相等, 即 _____ 且 _____, 那么这两个复数相等, 记作 $a+bi=c+di$.

注意: (1) 如果两个复数都是实数, 那么这两个复数可以比较大小; 如果两个复数不都是实数, 那么这两个复数只有相等和不相等两种关系, 而不能比较

大小.

(2) 由复数相等可得到两个关于实数的等式, 这是解决复数相等问题的有效途径之一, 即复数问题实数化.

4. 复数的加法

(1) 复数的加法法则

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 是任意两个复数, 那么它们的和是 $(a+bi)+(c+di)=$ _____.

注意: ① 两个复数的和仍然是一个复数, 它的实数部分是原来两个复数实数部分的和, 它的虚数部分是原来两个复数虚数部分的和.

② 记忆时可以类比多项式的加法, 当 $b=0, d=0$ 时与实数加法的法则一致.

5. 复数的减法

(1) 复数的减法

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 是任意两个复数, 那么它们的差是 $(a+bi)-(c+di)=$ _____.

两个复数的差还是一个复数, 它的实数部分是原来两个复数实数部分的差, 它的虚数部分是原来两个复数虚数部分的差.

6. 复数的乘法

(1) 复数的乘法法则

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 是任意两个复数, 那么它们的积是 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

注意: ① 两个复数的乘积仍然是一个复数.

② 复数的乘法与多项式的乘法相类似, 只是在运算过程中要把 i^2 换成 -1 , 并且把实数部分与虚数部分分别合并.

(2) 复数乘法的运算律

复数的乘法满足交换律、结合律以及分配律, 即对任意复数 z_1, z_2, z_3 , 有 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

7. 复数的乘方

对任何复数 z_1, z_2 及正整数 m, n , 有 $z^m \cdot z^n =$ _____;
_____ ; $(z^m)^n =$ _____ ; $(z_1 \cdot z_2)^n =$ _____.

「问题 1」实数集中的乘方公式在复数集中还适用吗?

「问题 2」 $i^n (n \in \mathbb{N}^+)$ 有怎样的规律?

注意: $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$.

8. 复数的除法

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c+di \neq 0).$$

注意: 两个复数相除, 类似化简无理分式时所采用的分母有理化, 只要分子分母同乘以复数 $c-di$ 即可. 由于 $(c+di)(c-di) = c^2+d^2$ 是正实数, 所以分子分母同乘以复数 $c-di$ 后可以实现分母实数化. 这种方法叫做分母实数化法.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 复数的加法运算

【例 1】计算:

(1) $(2+3i) + (4+5i)$;

(2) $1 + (i+i^2) + (-1+2i) + (-1-2i)$.

规律方法

复数的加法运算类似于多项式的合并同类项, 首先确定各个复数的实数部分、虚数部分, 再将所有实数部分和虚数部分分别求和, 最后将实数部分的和作为实数部分, 虚数部分的和作为虚数部分, 写出复数的代数形式.

跟踪演练 1

(1) $(2+4i) + (3-4i) =$ _____.

(2) 已知 $z_1 = 2+i, z_2 = 3-2i, z_3 = 4-2i$, 计算 $z_1 + z_2 + z_3$.

要点二 复数的加减运算

【例 2】计算:

(1) $(3-5i) + (-4-i) - (3+4i)$;

(2) $5i - [(3+4i) - (-1+3i)]$;

(3) $(a+bi) - (2a-3bi) - 3i (a, b \in \mathbb{R})$.

规律方法

1. 几个复数的加减混合运算, 若算式中有括号, 则先计算括号中的数; 若算式中没有括号, 则从左到右依次进行计算.

2. 算式中出现字母, 先要确定其是否为实数, 再确定复数的实数部分和虚数部分, 最后把实数部分、虚数部分分别相加减.

跟踪演练 2

(1) 计算: $(1+2i) + (3+4i) - (5+6i) =$ _____.

(2) 若 $z_1 = -3-i$, $z_2 = 2i+1$, 且 $z_1 + z = z_2$, 则 $z =$ _____.

(3) 已知 $(3-ai) - (b+4i) = 2a-bi$, 求实数 a, b 的值.

要点三 复数的乘法与乘方运算

【例 3】计算: (1) $(1+i)(2-3i)$;

(2) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

(3) $(2-i)(3+2i)(-2+3i)$;

(4) $(2-i)^3$;

(5) $i^{2018} + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^8 + (3-4i)^2(3i+4)^2$.

规律方法

1. 两个复数相乘按照多项式相乘的方法展开, 把 i^2 换成 -1 , 并且把实数部分与虚数部分分别合并.

2. 多个复数相乘, 先两个复数相乘, 然后再与其余复数相乘.

3. 注意灵活应用实数系中的乘法公式, 同时对于一些简单算式要知道其结果, 这样可方便计算, 简化运算过程, 例如 $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$, i 的幂的周期性等.

跟踪演练 3

(1) 计算: _____.

① $(a-bi)^2$; ② $(3+2i)^2(5-12i)$.

(2) 已知 $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, 求 $z^{100} + z^{50} + 1$.

要点四 复数的综合运算

【例 4】计算:

(1) $(3+i) \div (2-i)$;

(2) $\frac{(1+i)^3 - (1-i)^3}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$;

(3) $\frac{2+2i}{(1-i)^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2018}$.

规律方法

1. 进行复数的运算, 除了应用四则运算法则之外, 对于一些简单算式要知道其结果, 这样可方便计算, 简化运算过程, 例如 $\frac{1}{i} = -i$, $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$, $\frac{1+i}{1-i} = i$, $\frac{1-i}{1+i} = -i$, $a+bi = i(b-ai)$, i 的幂的周期性等.

2. 运算方法要灵活, 有时要巧妙运用相应实数系中的乘法公式.

计算:

(1) $\frac{-16+14i}{3+2i}$;

(2) $\frac{3+i}{4-2i} - \frac{7-2i}{1+i}$;

(3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{24}$.

1. $(\sqrt{3}+2i) + (\sqrt{3}-2)i + i^2 =$ _____.

2. $(-10-8i) + (12+6i) - (-7i+4) =$ _____.

3. 计算: $(-1+3i)(-1-3i) =$ _____.

4. 计算: $(1+2i)^2 =$ _____.

5. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $(a-i)\left(\frac{1}{2}-i\right) = 2+b$, 则 $a+bi =$ _____.

6. 计算: $\frac{1+3i}{3+4i} =$ _____.

7. $\frac{1}{-2+i} + \frac{1}{1-2i} =$ _____.

8. 计算:

(1) $(1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$;

(2) $(1-i)(3+2i)(2+2i)^2$.

学习目标

1. 理解复数的实部与虚部与共轭复数的概念.
2. 掌握共轭复数的运算法则.

温故知新 WENGUZHIXIN

知识链接

虚数单位

i 叫做虚数单位, 规定 $i^2 = -1$, 即 i 是 -1 的一个平方根.

预习导学

1. 复数的概念

形如 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫做复数, 其中, a 与 b 分别叫做复数的实部和虚部. 复数的实部记作 $\operatorname{Re} z$, 复数的虚部记作 $\operatorname{Im} z$.

复数通常用字母 z 表示, 即 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 这一形式叫做复数的代数形式.

注意: 复数 $a + bi$ 的虚部指的是虚数单位 i 的系数 b .

2. 复数的分类

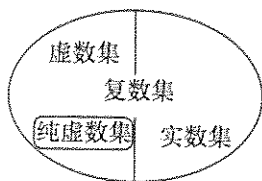
(1) 对于复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当 $b = 0$ 时, 复数 $z = a + bi = a$ 是实数; 当 $b \neq 0$ 时, z 叫做虚数; 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, $z = a + bi = bi$ 叫做纯虚数; 当且仅当 $a = b = 0$ 时, z 是实数 0 .

(2) 复数的分类

复数 ($z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$)

$$\begin{cases} (b=0) \\ (b \neq 0) \end{cases} \begin{cases} (a=0) \\ \text{非纯虚数}(a \neq 0) \end{cases}$$

集合表示如图所示:



3. 共轭复数

实部相等而虚部互为相反数的两个复数, 叫做共轭复数, 也称这两个复数互为共轭. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示, 即当 $z = a + bi$ 时, $\bar{z} = a - bi$.

说明: (1) z 的共轭复数是 $\bar{z}$, $\bar{z}$ 的共轭复数是 z .

(2) 实数的共轭复数是它自身; 虚数与它的共轭复数, 实部相等, 虚部互为相反数.

(3) 互为共轭的两个复数所对应的点关于 x 轴对

称. 反之, 如果复平面上两个点关于 x 轴对称, 那么这两个点对应的复数互为共轭.

(4) 互为共轭的两个复数的模相等.

(5) 共轭复数的和是实数.

(6) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 复数的有关概念

【例 1】说出复数 $2 + 3i$, $-3 + \frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{3}i$, $-\sqrt{3} - \sqrt{5}i$ 的实部和虚部, 有没有纯虚数?

规律方法

在复数 $z = a + bi$ 中, a 是实部, b 是虚部, 虚部是 i 的系数, 且 a, b 都是实数.

跟踪演练 1

指出下列各复数的实部和虚部: $z = 4 - 5i$, $z = i$, $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $z = 6i - 2$.

要点一 复数的分类

【例2】求当 m 为何实数时,复数 $z=(m^2-5m+6)+(m^2+3m-10)i$ 分别是:

(1)实数;

(2)虚数;

(3)纯虚数;

(4)0.

规律方法

利用复数的代数形式解决复数分类问题的关键是根据复数的有关概念列出实部、虚部满足的关系式.

跟踪演练②

已知复数 $z=\frac{a^2-7a+6}{a^2-1}+(a^2-5a-6)i(a\in\mathbb{R})$,

试求实数 a 分别取什么值时, z 是:

(1)实数;

(2)虚数;

(3)纯虚数.

要点三 共轭复数

【例3】已知 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+(2y+x)i$ 和 $3x-(y+1)i$ 是共轭复数,求这两个复数.

规律方法

1. 互为共轭的两个复数的实部相等,虚部互为相反数.

2. 根据共轭复数的概念,把问题转化为解方程组是常用的解题方法.

跟踪演练③

已知 $z_1=(a^2-a-6)+(1-2a)i$, $z_2=(a-3)+(a^2-2a+2)i$,其中 $a\in\mathbb{R}$,若 $\overline{z_1}=z_2$,则 $a=$ _____.



当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 已知复数 $z=a^2-(2-b)i$ 的实部和虚部分别是 2 和 3,则实数 a, b 的值分别为 ()

A. $\sqrt{2}, 1$ B. $\sqrt{2}, 5$ C. $\pm\sqrt{2}, 5$ D. $\pm\sqrt{2}, 1$

2. 若复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是虚数,则实数 m 满足_____.

3. 指出下列复数的实部和虚部:

(1) $z=1+i$;

(2) $z=-\frac{1}{2}i$;

(3) $z=\sqrt{2}+\sqrt{7}i^2$;

(4) $z=i-4$.

4. 下列各数中,哪些是实数?哪些是虚数?哪些是纯虚数?

$1-\sqrt{3}i, (1-\sqrt{3})i, -\sqrt{3}i^2, (1-\sqrt{3})i^2, 2i-\sqrt{3}, 2i^2-\sqrt{3}$.

5. 已知 $z_1=3+2i, z_2=-2+i$,求 z_1+z_2 .

6. 已知 $m\in\mathbb{R}$,复数 $z=\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)i$,求

当 m 为何值时,

(1) $z\in\mathbb{R}$;

(2) z 是虚数;

(3) z 是纯虚数.

9.2 复数的几何意义

第①课时 复平面与复数的坐标表示、向量表示及复数加法的平行四边形法则

学习目标

1. 理解复数与复平面上的点之间的对应关系.
2. 理解复数与向量之间的对应关系.
3. 理解复数加法的几何意义.

温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 实数与数轴上的点一一对应, 实数可用数轴上的点来表示.
2. 有序实数对 (x, y) 与平面直角坐标系内的点 $P(x, y)$ 是一一对应的.
3. 向量 $\vec{a} = (x, y)$ 与平面直角坐标系内的点 $P(x, y)$ 是一一对应的.
4. 复数的加法法则

设 $a+bi, c+di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ 是任意两个复数, 那么它们的和是 $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

预习导学

1. 复平面

建立了直角坐标系用来表示复数的平面叫做复平面, x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴.

注意: (1) 表示实数的点都在实轴上, 表示纯虚数的点都在虚轴上, 原点表示实数 0.

(2) 每一个复数, 在复平面内有唯一的点和它对应; 反过来, 复平面内的每一个点, 都有唯一的一个复数和它对应, 即复数集中的元素和复平面内所有的点所组成的集合是一一对应的.

「问题 1」复平面内与复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 对应的点在实轴和虚轴上的坐标分别是什么?

2. 复数的向量表示

复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 连接 OZ , 向量 $\vec{OZ}$ 由点 Z 唯一确定; 反过来, 点 Z 也可以由向量 $\vec{OZ}$ 唯一确定. 这样, 复数集 $\mathbf{C}$ 中的元素和复平面上以原点为起始点的向量 $\vec{OZ}$ 也是一一对应的 (实数 0 与零向量对应).

「问题 2」复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 和复平面内的哪个向量对应?

注意: (1) 为方便起见, 常把复数 $z=a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 看作点 $Z(a, b)$ 或向量 $\vec{OZ}$.

(2) 规定: 相等的向量表示同一个复数.

(3) 小写的字母 z 表示复数 $a+bi$, 大写字母 Z 表示一个点, 其坐标是 (a, b) .

(4) 向量一般指“自由向量”, 它可以平行移动, 但复数 $z=a+bi$ 对应位置向量.

3. 复数加法的几何意义

设复数 $z_1=a+bi, z_2=c+di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$, 在复平面上所对应的向量为 $\vec{OZ_1}, \vec{OZ_2}$, 即 $\vec{OZ_1}, \vec{OZ_2}$ 的坐标形式为 $\vec{OZ_1}=(a, b), \vec{OZ_2}=(c, d)$, 以 $\vec{OZ_1}, \vec{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2 , 则对角线 OZ 对应的向量 $\vec{OZ}$ 为 z_1+z_2 , $\therefore \vec{OZ}=\vec{OZ_1}+\vec{OZ_2}=(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$, 即 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$.

(3) 复数加法的运算律

对任意复数 z_1, z_2, z_3 , 有 $z_1+z_2=z_2+z_1, (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

说明: 复数加法的运算律与实数加法的运算律是一致的.

复数与点

【例 1】求实数 x 分别取什么值时,复数 $z=x^2+x-6+(x^2-2x-15)i$ 在复平面内对应的点 Z 满足下列条件.

(1)在第四象限;

(2)在直线 $x-y-3=0$ 上.

规律方法

复数的实部、虚部分别对应点在实轴和虚轴上的坐标,利用这点可把复数问题实数化,从而解决问题.

跟踪演练 1

在复平面内,若复数 $z=(m^2-m-2)+(m^2-3m+2)i$ 的对应点:

(1)在虚轴上;(2)在第二象限;(3)在直线 $y=x$ 上,分别求实数 m 的取值范围.

复数与向量

【例 2】已知在平面直角坐标系中, O 是原点,向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3i, -3+2i$,求向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数.

规律方法

解决复数与平面向量一一对应的题目时,一般以复数与复平面内的点一一对应作为工具,实现复数、复平面内的点、向量之间的转化.

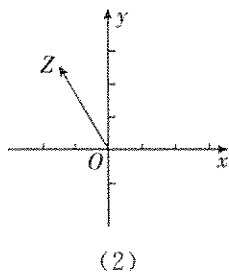
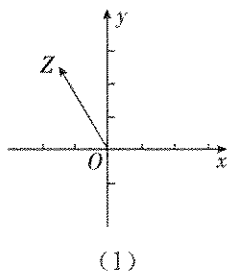
跟踪演练 2

在复平面内,点 A, B, C 所对应的复数分别是 $2+3i, 3+2i, -2-3i$,求 $\square ABCD$ 中点 D 对应的复数.

要点三 复数加法的几何意义

【例3】如图,向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数是 z ,试作出下列运算结果所对应的向量.

- (1) $z+1$;
(2) $z+(-2+i)$.



规律方法

复数集 $\mathbf{C}$ 中的元素和复平面上以原点为起始点的向量是一一对应的,故复数的加法与向量的加法是一致的.

跟踪演练 3

求下列各组数的和,并在复平面上作出这两个复数及它们的和对应的向量.

- (1) $3-2i, -4+5i$;
(2) $-1+2i, 1+3i$;
(3) $3+4i, 3-4i$.

当堂检测

1. 复数 $z_1=1+\sqrt{3}i$ 和 $z_2=1-\sqrt{3}i$ 在复平面内对应的点关于 ()
A. 实轴对称
B. 虚轴对称
C. 一、三象限的角平分线对称
D. 二、四象限的角平分线对称

2. 在复平面内, O 为原点,向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $-1-2i$.若点 A 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 B ,则向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 ()

- A. $-2-i$ B. $2+i$
C. $1+2i$ D. $-1+2i$

3. 复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 在复平面内对应的点位于第 _____ 象限.

4. 向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $5-4i$,向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $-5+4i$,则向量 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数在复平面内对应的点的坐标是 _____.

5. 求实数 m 分别取什么数时,复数 $z=m^2+5m+6+(m^2-2m-15)i$

- (1) 对应的点在第三象限;
(2) 对应的点在直线 $x+y+4=0$ 上.

学习目标

1. 掌握复数的模的概念, 理解复数模与向量模的关系、复数模与实数绝对值的关系.
2. 理解复数模的几何意义.

温故知新

知识链接

1. 复数 $z = a + bi$ 对应的点的坐标为 _____.
2. $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离 $|P_1P_2| =$ _____.
3. 向量 $\vec{a} = (x, y)$ 的模 $|\vec{a}| =$ _____.
4. 设 $a + bi$ 和 $c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ 是任意两个复数, 那么它们的差是 $(a + bi) - (c + di) =$ _____.

预习导学

1. 复数的模

复数 $z = a + bi$ 所对应的点 $Z(a, b)$ 到坐标原点的距离叫做复数 z 的模(或绝对值), 记作 $|z|$, 由模的定义可知 $|z| = |a + bi| =$ _____.

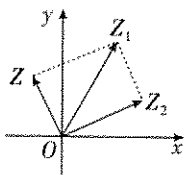
注意: (1) 如果 $b = 0$, 那么 $|z| = |a|$ (即实数 a 的绝对值). 当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$, 故复数模的概念是实数绝对值概念的延伸, 而实数绝对值概念是复数模的概念的特例.

(2) 如果 $a = 0$, 那么 $|z| = |b|$, 而不是 b .

(3) 根据复数模的定义, 可知 $z = a + bi$ 的模(或绝对值)与 $z = a + bi$ 对应的向量 $\vec{OZ}$ 的模是一致的, 所以复数的模也可以说成是其对应向量的模.

2. 复数减法的几何意义

设复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 分别对应向量 $\vec{OZ}_1, \vec{OZ}_2$, 两个复数的差 $z_1 - z_2 = z$, 则 z 对应于两个向量的差 $\vec{OZ}_1 - \vec{OZ}_2$, 如图所示.



3. 复平面上两点间的距离

设两复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ 分别对应复平面上的点 $Z_1(a, b), Z_2(c, d)$, 则 $|z_1 - z_2| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$. $|z_1 - z_2|$ 表示两点 Z_1, Z_2 之间的距离, 即复平面上的点 $Z_1(a, b), Z_2(c, d)$ 间的距离为 $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

注意: 复平面上两点 Z_1 和 Z_2 之间的距离 d , 可由 Z_1, Z_2 所对应的复数 z_1, z_2 的差的模求得, 即 $d = |z_1 - z_2|$, 也可由 Z_1, Z_2 所对应的向量 $\vec{OZ}_1, \vec{OZ}_2$ 的差的模求得, 即 $d = |\vec{OZ}_1 - \vec{OZ}_2| = |Z_2Z_1|$.

课堂讲义

要点一 复数模的概念的应用

【例 1】(1) 已知 $z_1 = -3 + i, z_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}i$, 求 $|z_1|$ 和 $|z_2|$, 并比较模的大小.

(2) 若复数 $z = (x - 1) + (2x - 1)i$ 的模小于 $\sqrt{10}$, 求实数 x 的取值范围.

规律方法

解决复数模的有关问题时, 要紧扣模的定义.

跟踪演练 ①

(1) 已知 $3 - 4i = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $|1 - 5i|, |x - yi|, |y + 2i|$ 的大小关系为 _____.

(2) 复数 $z_1 = a + 2i, z_2 = -2 + i$, 若 $|z_1| < |z_2|$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

要点二 复数模的几何意义的应用

【例 2】已知复数 z , 满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?

(1) $|z| = 4$;

(2) $2 < |z| < 4$.

规律方法

从几何意义上理解,复数的模表示点 Z 到原点的距离,类比向量的模,可进一步引申: $|z-z_1|$ 表示点 Z 到点 Z_1 的距离.例如, $|z-i|=1$ 表示点 Z 到点 $(0,1)$ 的距离,所以点 Z 的轨迹是以 $(0,1)$ 为圆心,1 为半径的圆.

跟踪演练 2

设 z 为复数,在复平面内满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?请画出图形.

- (1) $\operatorname{Re} z = 1$; (2) $\operatorname{Im} z = -2$;
(3) $|z| = 5$; (4) $1 < |z| \leq 4$.

要点三 复数减法的几何意义

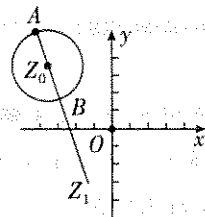
【例 3】 复数 z 满足 $|z-2+2i|=\sqrt{2}$, 求 $|z|$ 的取值范围.

规律方法

1. 若复平面上的任意两点 Z_1, Z_2 所对应的复数分别是 z_1, z_2 , 则复数 $z_2 - z_1$ 与向量 $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 对应, 则 $|\overrightarrow{Z_1 Z_2}| = |z_2 - z_1|$ 表示复数 z_1, z_2 所对应的点 Z_1, Z_2 之间的距离.

2. 若 $|z-z_0| = |z-z_1|$, 则复数 z 对应的点 Z 在以 z_0 和 z_1 分别对应的点 Z_0, Z_1 为端点的线段 $Z_0 Z_1$ 的中垂线上.

3. 若 $|z-z_0|=r$, 则复数 z 对应的点 Z 在以 z_0 对应的点 Z_0 为圆心, r 为半径的圆上. z_1 对应于点 Z_1 , 连接 $Z_0 Z_1$, 并延长交圆 Z_0 于 A, B 两点. 如图所示, 由数形结合知: $|z-z_1|$ 的最小值为 $|BZ_1| = |Z_0 Z_1| - |Z_0 B| = |z_0 - z_1| - r$, 最大值为 $|AZ_1| = |Z_0 Z_1| + |Z_0 A| = |z_0 - z_1| + r$.



跟踪演练 3

已知复数 z 的模为 2, 求 $|z-i|$ 的最大值.

当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 求下列复数的模:

(1) $z_1 = 2 + 3i$, 则 $|z_1| =$ _____;

(2) $z_2 = -2i$, 则 $|z_2| =$ _____;

(3) $z_3 = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$, 则 $|z_3| =$ _____.

2. 若 $2+ai=b-i$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则复数 $z=a+bi$ 的模等于 _____.

3. 已知复数 $z=4+ai (a \in \mathbf{R})$, 且 $|z| < 6$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

4. 已知复数 $z=x-2+yi (x, y \in \mathbf{R})$ 的模为 3, 则点 (x, y) 的轨迹方程为 _____.

5. 在复平面内画出符合条件 $2 < |z| < 4$ 且 $|\operatorname{Re} z| \geq 3$ 的复数 z 对应的点 Z 的图形.

6. 已知复数 $|z-(1+i)|=2$, 求 $|z+3-4i|$ 的取值范围.

9.3 实系数一元二次方程

学习目标

1. 理解复数平方根的定义, 会求复数的平方根.
2. 理解在复数范围内, 实系数一元二次方程总有两个根, 并掌握根的求法.
3. 当 $\Delta < 0$ 时, 实系数一元二次方程有两个共轭的虚数根.
4. 掌握实系数一元二次方程根与系数的关系.

温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 如果 _____, 那么 x 叫做 a 的平方根; 如果 _____, 那么 x 叫做 a 的立方根.
2. 在实数范围内, 一个正实数 a 的平方根有 _____ 个, 分别是 _____; 0 的平方根是 _____; 一个负实数 _____ 平方根. 一个实数 b 的立方根有 _____ 个, 是 _____.
3. $(a+bi)^2 =$ _____, $[-(a+bi)]^2 =$ _____.
4. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$.
 - (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 方程 _____ 实数根, 根为 _____;
 - (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程 _____ 实数根, 根为 _____;
 - (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 _____ 实数根.
5. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$ 的两实根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2 =$ _____, $x_1x_2 =$ _____.
6. 若 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 则以 x_1, x_2 为根的一元二次方程为 _____.

预习导学

1. 复数的平方根

如果复数 $a+bi$ 和 $c+di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ 满足: $(a+bi)^2 = c+di$, 则称 $a+bi$ 是 $c+di$ 的一个平方根. 因为 $[-(a+bi)]^2 = (a+bi)^2$, 所以 $-(a+bi)$ 也是 $c+di$ 的平方根. 根据规定 $i^2 = -1$, 即 i 是 -1 的一个平方根, $-i$ 也是 -1 的一个平方根.

「问题 1」怎样求复数 $a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的平方根?

2. 实系数一元二次方程根的情况

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根 $x = -\frac{b}{2a} \pm$

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当 $\Delta = 0$ 时, 有两个相等的实数根 $x = -\frac{b}{2a}$;

当 $\Delta < 0$ 时, 方程有两个不相等的虚数根 $x = -\frac{b}{2a} \pm$

$$\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i.$$

「问题 2」当 $\Delta < 0$ 时, 方程的两个不相等的虚数根之间有什么关系?

「问题 3」二次三项式 $ax^2+bx+c (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$ 在复数集中能否进行因式分解?

「问题 4」对于复系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a, b, c \in \mathbf{C} \text{ 且 } a \neq 0)$, 能否用 $\Delta = b^2 - 4ac$ 判断方程根的情况?

3. 一元二次方程根与系数的关系

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2 =$ _____, $x_1x_2 =$ _____.

注意: 根与系数的关系在复数根的情况下仍然适

用, 即当 $\Delta < 0$ 时, 方程的两个共轭的虚数根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

「问题 5」若 x_1, x_2 是复数, 则以 x_1, x_2 为根的实系数一元二次方程为_____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 求复数的平方根

【例 1】求下列复数的平方根:

- (1) $-3+4i$; (2) -3 .

规律方法

1. 求复数的平方根的基本方法是待定系数法: 设平方根 $\rightarrow$ 列方程组 $\rightarrow$ 解方程组 $\rightarrow$ 得到平方根.

2. 一个负实数 k 的平方根为 $\sqrt{-k}i$ 和 $-\sqrt{-k}i$.

跟踪演练 1

- (1) -7 的平方根为_____;
- (2) 求复数 $4i$ 的平方根.

要点二 实系数一元二次方程根的判断问题

【例 2】(1) 若实系数方程 $x^2 + mx + m = 0$ 有虚数根, 则实数 m 的取值范围是_____.

(2) 求实数 m , 使方程 $x^2 + (m+2i)x + (1+mi) = 0$ 至少有一个实根.

规律方法

实系数一元二次方程根的情况可利用 Δ 判断, 但对复系数一元二次方程不成立, 正确的解法是将复数问题实数化.

跟踪演练 2

若关于 x 的方程 $x^2 - kx + 3 = 0$ 有虚数根, 则实数 k 的取值范围是_____.

要点三 解方程

【例 3】在复数集内解方程: $2x^2 = 5(x-1)$.

规律方法

1. 用求根公式求解实系数一元二次方程的根时, 一定要注意方程 Δ 的取值.

2. 当 $\Delta < 0$ 时, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$, 不要错写成 $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}i$.

跟踪演练 3

已知方程 $x^2 - 3x + 5m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 求方程的解.

要点四 分解因式

【例 4】在复数范围内分解因式: $2x^2+2x+3$.

规律方法

利用根与系数的关系时注意以下几点: (1) 如果需要讨论, 则需分 $\Delta \geq 0$ 和 $\Delta < 0$ 两种情况; (2) 虚根必定“成对”出现, 即两根互为共轭; (3) 当 $\Delta < 0$ 时, $|a|^2 = |\bar{a}|^2 = a\bar{a}$ 和 $|\alpha-\beta|^2 = |(\alpha-\beta)^2|$ ($|\alpha-\beta|^2 \neq (\alpha-\beta)^2$) 的应用.

跟踪演练 5

(1) 关于 x 的方程 $2x^2 - (3m-1)x + m^2 + 1 = 0$ 的两根为 α, β , 且 $|\alpha| + |\beta| = 3$, 求实数 m 的值.

(2) 方程 $x^2 + px + p = 0$ 的两根在复平面内对应的点之间的距离是 $\sqrt{3}$, 求实数 p 的值.

规律方法

若 x_1, x_2 是实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$) 的根, 则有 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

跟踪演练 4

在复数范围内分解因式 $x^3 - x^2 + x$.

要点六 实系数一元二次方程根与系数关系的应用

【例 6】(1) 已知方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有一个根为 $1 + 2i$, 求实数 k 的值.

(2) 已知方程 $x^2 - kx + 2 = 0$ 有一个根为 $1 + 2i$, 求复数 k 的值.

(3) 写出一个实系数一元二次方程, 使它的两个根分别为 $1 + 3i$ 和 $1 - 3i$.

要点五 实系数一元二次方程根与系数的关系

【例 5】(1) α, β 是方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的两个根, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 求 $|\alpha| + |\beta|$ 的值.

(2) 设方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$ 的两根为 α, β , 且 $|\alpha - \beta| = 3$, 求实数 m 的值.

规律方法

1. 实系数一元二次方程的共轭虚数根成对出现, 即若 $m+ni$ 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根, 则 $m-ni$ 是 $ax^2+bx+c=0$ 的另一个根, 注意只有实系数一元二次方程才满足上述规律, 如例 2(2) 题就不能用此规律求解, 注意这两种题型解题方法的不同.

2. 已知实系数一元二次方程的一个根, 求参数的值时有两种方法: 一是将根代入方程, 利用复数相等, 将复数问题实数化求解; 二是利用实系数一元二次方程根与系数的关系求解.

3. 以 x_1, x_2 为根的实系数一元二次方程为 $x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0$.

跟踪演练 6

(1) 若 $1+i$ 是实系数方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根, 则另一个根为 _____, $a=$ _____, $b=$ _____.

(2) 若实系数一元二次方程有一个根为 $2+3i$, 则这个方程为 ()

A. $x^2-4x-5=0$

B. $x^2+4x-5=0$

C. $x^2-4x+13=0$

D. $x^2+4x+13=0$

课堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 28 的平方根为 _____; -9 的平方根为 _____.

2. 若关于 x 的方程 $x^2+2kx-3k=0$ 有虚根, 则实数 k 的取值范围是 _____.

3. 方程 $2x^2+1=0$ 的解是 _____.

4. 二次方程 $x^2-3ix-3=0$ 的根的情况为 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个虚根

C. 有两个共轭虚根

D. 有一实根和一虚根

5. 在复数范围内分解因式: x^4-4 .

6. $3+2i$ 是实系数一元二次方程 $2x^2+bx+c=0$ 的一个根, 则 $c=$ _____.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2-kx+2=0$ 有一虚根 i , 则其另一根为 _____.

8. 若方程 $x^2-ax+2=0$ ($a \in \mathbf{R}$) 有虚数根 z , 则 $|z|=$ _____.

9. 已知 $x_1+x_2=3, x_1x_2=6$, 则 x_1, x_2 应满足方程 ()

A. $x^2+3x+6=0$

B. $x^2+3x-6=0$

C. $x^2-3x+6=0$

D. $x^2-3x-6=0$

10. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2-x+7=0$ 的两个根, 求 $|x_1-x_2|^2$.

* 9.4 复数的三角形式

第①课时 复数的三角形式

学习目标

1. 掌握复数的三角形式.
2. 理解辐角的几何意义.

温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

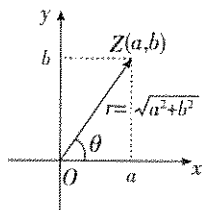
复数的向量表示

复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 连接 OZ , 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 由点 Z 唯一确定; 反过来, 点 Z 也可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定. 这样, 复数集 $\mathbb{C}$ 中的元素和复平面上以原点为起始点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也是一一对应的 (实数 0 与零向量对应).

预习导学

1. 复数的辐角

(1) 复数集 $\mathbb{C}$ 中的元素和复平面上以原点为起始点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的, 因此确定了向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也就确定了复数, 因此复数可以被它的模和以原点为顶点, x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的角 θ 唯一确定, 因此这个角 θ 叫做复数 z 的辐角, 记作 $\text{Arg} z$.



「问题 1」复数的辐角唯一吗? 虚数单位 i 的辐角可以是什么?

(2) 规定: 复数 0 的辐角的大小是任意的值.

2. 辐角主值

在复数 z 的所有辐角中, 满足 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的辐角 θ 称为 z 的辐角主值, 记作 $\arg z$.

「问题 2」复数的辐角主值唯一吗?

「问题 3」复数可以由哪些量唯一确定?

由此任意一个复数都可以表示为三角形式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

课堂讲义

KETANG JIANGYI

要点一 求复数的辐角主值

【例 1】分别写出下列复数的模 r 与辐角主值 θ , 并把这些复数用三角形式表示:

(1) $\sqrt{3} + i$;

(2) $-1 + i$.

规律方法

1. 先求复数的模, 将模提取后, 实部即为 $\cos \theta$, 虚部即为 $\sin \theta$, 即可求出辐角, 取辐角中在 $[0, 2\pi)$ 范围内的角即为该复数的辐角主值.

2. 确定的复数辐角不唯一, 而辐角主值是唯一的.

求下列复数的辐角主值 θ :

(1) -1 ;

(2) $-3-4i$.

1. 下列复数是否用三角形形式来表示的? 为什么?

(1) $3\pi(\cos 0.5 + i\sin 0.5)$;

(2) $2(\sin 1 + i\cos 1)$;

(3) $\cos 131\pi + i\sin 131\pi$;

(4) $\sqrt{2}(\cos 0.3\pi + i\sin 0.3\pi)$;

(5) $-2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right)$;

(6) $3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i\sin \frac{\pi}{5}\right)$.

要点二 复数的三角形式

【例 2】用三角形形式表示复数 $\cos \theta - i\sin \theta$.

2. 把下列复数用三角形形式表示(用辐角主值)

(1) 3 ; (2) $-2i$;

(3) $1+i$; (4) $-1+\sqrt{3}i$.

规律方法

对于含参问题, 采取同样的方法, 先求模, 再求辐角, 即可表示为三角形形式.

跟踪演练 ②

用三角形形式表示复数 $-2(\cos \alpha + i\sin \alpha)$.

学习目标

1. 掌握三角形式下复数的乘除、乘方和开方.
2. 理解复数乘除、乘方、开方的几何意义.

温故知新

知识链接

1. 设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 是任意两个复数, 那么它们的积是 $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$.

2. 复数的除法: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c+di \neq 0$).

预习导学

1. 三角形式下复数的乘除运算

「问题 1」按复数的乘法法则, $z_1 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 与 $z_2 = s(\cos \beta + i \sin \beta)$ 的积是什么 (其中 $r = |z_1| \geq 0$, $s = |z_2| \geq 0$)?

思考 1

解: 由复数的乘法法则, 得 $z_1 z_2 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) = rs(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta))$.

思考 2

解: 由三角函数的和角公式, 得 $z_1 z_2 = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$.

「问题 2」按复数的除法法则, $\frac{z_1}{z_2}$ 是什么?

思考 3

2. 三角形式下复数的乘除运算

「问题 3」三角形式下复数的乘法和除法的几何意义是什么?

3. 三角形式下复数的乘方和开方

「问题 4」按复数的乘法法则, $z_1^n =$ _____.

「问题 5」按复数的乘法法则, $\sqrt[n]{z_1} =$ _____.

课堂讲义

要点一 三角形式下复数的乘除运算

【例 1】计算, 并用复数的代数形式表示计算结果:

$$(1) \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$(2) \frac{4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}.$$

规律方法

运用三角形式下复数的乘法除法运算公式进行计算.

跟踪演练 ①

计算:

$$(1) 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$$

$$(2) \frac{6 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right)};$$

$$(3) \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^5.$$

【例 2】设复数 $-2+2i$ 在复平面上所对应的向量是 $\overrightarrow{OZ}$, 将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转 120° 得到向量 $\overrightarrow{OZ'}$.

求向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 所对应的复数. (结果用复数的代数形式表示)

规律方法

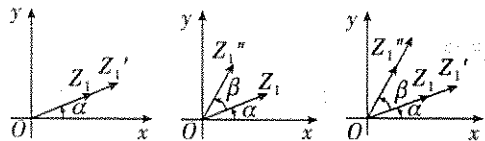
三角形形式下复数乘法的几何意义是旋转和伸缩, 因此对于向量或点的旋转问题, 我们可以用复数的方法解决.

跟踪演练 ②

设复数 $-2+2i$ 在复平面上所对应的向量是 $\overrightarrow{OZ}$, 将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转 120° , 再将其模长变为原来的 2 倍得到向量 $\overrightarrow{OZ'}$, 求向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 所对应的复数. (结果用复数的代数形式表示)

要点二 三角形形式下复数乘法的几何意义

在复平面上, 把复数 $z_1 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (其中 $r = |z_1| \geq 0$) 对应的向量记为 $\overrightarrow{OZ_1}$, 则 $|\overrightarrow{OZ_1}| = r$, 而从 x 轴正向到 $\overrightarrow{OZ_1}$ 方向的有向角记为 α . 或者先旋转, 后伸缩. 从复数乘法的结果我们知道, 这两个不同顺序会得到同样的结果.



1. 求 1 的所有四次方根.

3. 求 $-i$ 的所有三次方根.

2. 计算:

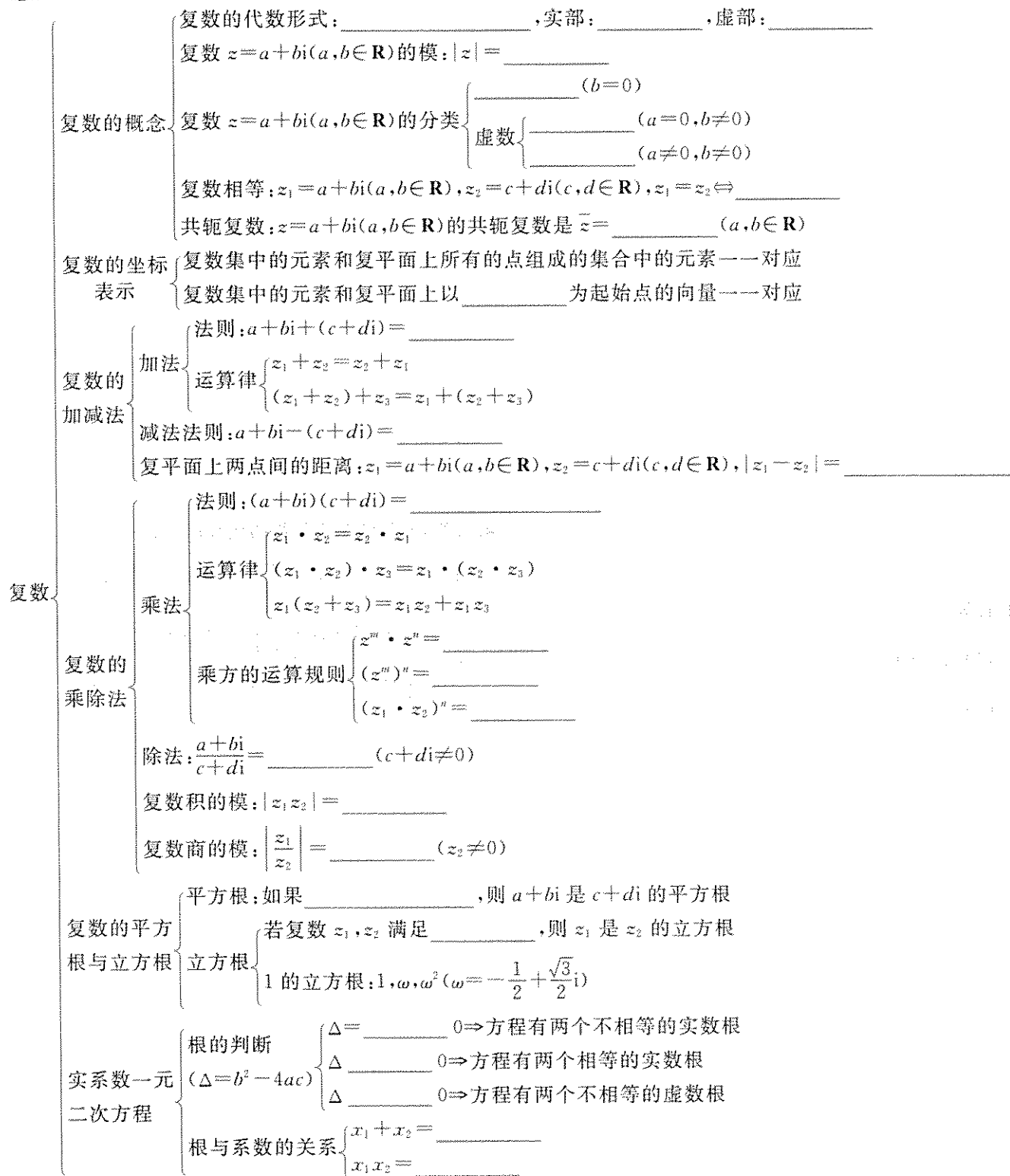
$$(1) \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3;$$

$$(2) (\sqrt{3} - i)^{12}.$$

4. 计算, 并将结果用复数的代数形式表示:

$$(1) \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)^2 \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right);$$

$$(2) \frac{\sqrt{5} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)^2 \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \right)}{\sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \right) \cdot \sqrt{5} \left(\cos \frac{7\pi}{3} - i \sin \frac{7\pi}{3} \right)}.$$



一、复数的有关概念

复数的有关概念问题,通常以概念为载体,侧重考查复数的四则运算,解决此类问题首先要找准复数的实部与虚部,若复数不是 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式,则应通过代数运算化为 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式,然后根据定义解题.若题目中没给出复数的代数形式,则需设出.

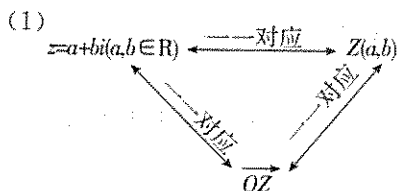
【例 1】(1)若复数 $\frac{a+3i}{1-2i}(a \in \mathbf{R}, i$ 为虚数单位)是纯虚数,则实数 a 的值为_____.

(2)已知 $(2-i)z+(-3+2i)\bar{z}=4+4i$,求 z .

二、复数的几何意义

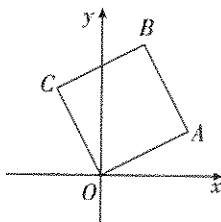
复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 和复平面内的点 $Z(a, b)$ 一一对应,和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应.

复数的向量表示体现了数形结合思想,利用复数的向量表示及模的几何意义,可以将抽象的代数式转化为直观的图形,以便于解决问题,具体归纳如下:



(2) $|z|$ 表示复数 z 对应的点与原点的距离.

(3) $|z_1 - z_2|$ 表示两点间的距离.



【例 2】已知复数 z 满足 $|z|=3$,则 $|z+4|+|z-4|$ 的取值范围是_____.

三、复数代数形式的四则运算

复数的四则运算中,加减法相当于“合并同类项”,乘法相当于“多项式乘以多项式”,除法采用的方法是“分母实数化”,即分子、分母同乘以分母的共轭复数,类似于“分母有理化”的方法.另外,一要注意出现 i^2 时用 -1 代替,二要注意“复数问题实数化”是解决复数问题最基本的思想方法.

适当记忆以下结论,以提高解题速度:

(1) $(1+i)^2=2i$;

(2) $(1-i)^2=-2i$;

(3) $\frac{1+i}{1-i}=i$;

(4) $\frac{1-i}{1+i}=-i$;

(5) $-b+ai=i(a+bi)$;

(6) $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i(n \in \mathbf{N}^*)$.

【例 3】(1)已知 i 为虚数单位,则 $(2+i)(3+i)=$ _____.

(2)复数 $z=\frac{(2-i)^2}{i}$ (i 为虚数单位),则 $|z|=$ _____.

(3)计算: $\frac{1+i^{2017}}{1-i}$ _____ (i 是虚数单位).

四、复数的平方根与立方根

求复数的平方根(立方根)的基本思路是从平方根(立方根)的定义出发列出等式,然后利用待定系数法得出相应的实数方程组,最后求出方程组的解.

注意: $1, \omega, \omega^2$ 都是 1 的立方根, 其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}i$. ω 具有以下性质: (1) $1 + \omega + \omega^2 = 0$; (2) $\omega^3 = 1$;

(3) $\omega^2 = \bar{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 可以运用这些性质求解相关问题.

【例 4】(1) 求 $8-6i$ 的平方根.

(2) 利用 1 的立方根性质计算 $(1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$.

五、实系数一元二次方程

对于实系数一元二次方程, 可利用判别式与 0 的大小比较, 判断出方程有实根、虚根. 而对于虚系数一元二次方程, 可利用方程等式两边的实部与虚部分别相等转化求解.

实系数一元二次方程的解答应注意以下几点: (1) 应分别讨论 $\Delta \geq 0$ 和 $\Delta < 0$ 两种情况; (2) 虚根必定成对出现, 且两根互为共轭复数; (3) 求根公式和根与系数的关系是基本工具.

【例 5】已知方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 的两根为 α, β 且满足 $|\alpha - \beta| = 6$, 求实数 m 的值.



名教联盟

