



上海重点高中标准题 · 咻咻一顿刷

高中数学 第8章

慕课 & 思度

校稿 UyNehc



第8章 平面向量

8.1 向量的概念和线性运算

第1课时 向量的概念

学习目标

1. 掌握向量以及相关基础概念.
2. 理解向量的平行的定义, 理解零向量与任意向量平行.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

向量是既有_____又有_____的量, 在平面内可以用带有箭头的线段表示, 如 $\overrightarrow{AB}$ 表示A到B的向量, 向量 $\overrightarrow{AB}$ (或 $\vec{a}$) 的大小叫做 $|\overrightarrow{AB}|$ (或 $|\vec{a}|$) 的_____, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ (或 $|\vec{a}|$).

预习导学

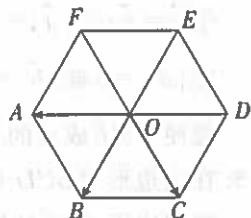
1. 单位向量: _____ 的向量.
2. 零向量: _____ 的向量.
3. 相等的向量: 模_____且方向_____的向量.
负向量: 模_____, 方向_____的向量.
4. 向量平行的有关概念
(1) 如果两个非零向量所在的直线_____, 那么称这两个向量平行.
(2) 规定: 零向量_____任意向量.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 相等的向量

【例1】设O是正六边形ABCDEF的中心, 写出满足条件的向量.

- (1) 与 $\overrightarrow{OA}$ 相等的向量;
- (2) 与 $\overrightarrow{OB}$ 相等的向量;
- (3) 与 $\overrightarrow{OC}$ 的模相同且平行的向量 (除 $\overrightarrow{OC}$ 外).

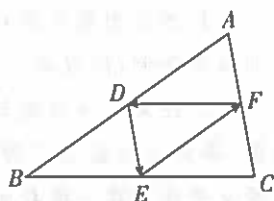


规律方法

向量的定义包含了两个方面, 即大小和方向, 所以研究相等的向量就是关注其大小以及方向.

跟踪演练 11

如图, D, E, F 分别是各边的中点, 分别写出图中与 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FD}$ 相等的向量.



要点二 向量的概念辨析

【例2】判断下列结论是否正确,并说明理由.

- (1)若 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是单位向量,那么 $\vec{a} = \vec{b}$;
- (2)若 $|\vec{a}| = 0$,那么 $\vec{a} = \vec{0}$;
- (3)若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 或者 $\vec{a} = -\vec{b}$.

规律方法

1. 单位向量只是对向量的大小加以要求,对其方向没有限制,所以单位向量有无数多个.
2. 注意区分向量与实数、向量的模与实数的绝对值.事实上向量是二维平面的几何对象,实数的几何意义是体现在一维数轴上的,除了零向量与实数0的性质有一定的类似之外,非零向量与非零实数基本没有类比关系.

跟踪演练②

判断下列结论是否正确,并说明理由.

- (1)向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 相等的充要条件是 $|\vec{a} - \vec{b}| = 0$;
- (2)平行的单位向量一定相等.

要点三 向量的平行

【例3】设平面内不相同的四点A, B, C, D,判断下列结论是否正确,并说明理由.

- (1)若 $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$,那么A, B, C三点共线;
- (2)若 $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$,那么A, B, C, D四点共线.

规律方法

1. 两个平行的向量,起点不一定重合.
2. 上述命题(1)的逆命题也是真命题,即:“A, B, C三点共线的充要条件是 $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$ ”,故而可以利用向量的知识来证明“三点共线”的几何特性.

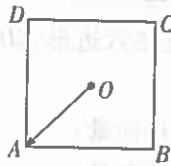
跟踪演练③

判断下列结论是否正确,并说明理由.

- (1)若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不平行,则 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量;
- (2)两个相等的向量,其起点、方向、长度一定相同.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 下列说法错误的是 ()
 - A. 若 $\vec{a} = \vec{0}$,则 $|\vec{a}| = 0$
 - B. 零向量是没有方向的
 - C. 零向量与任一向量平行
 - D. 零向量的方向是任意的
2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D, E分别是AB, AC的中点,则 ()
 - A. $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 平行
 - B. $\vec{DE}$ 与 $\vec{CB}$ 平行
 - C. $\vec{AD}$ 与 $\vec{AE}$ 相等
 - D. $\vec{AD}$ 与 $\vec{BD}$ 相等
3. 如图所示,已知正方形ABCD的边长为2, O为其中心,则 $|\vec{OA}| =$ _____.



4. 下列5个条件中:
 - ① $\vec{a} = \vec{b}$; ② $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; ③ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反;
 - ④ $|\vec{a}| = 0$ 或 $|\vec{b}| = 0$; ⑤ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是单位向量.
 能使 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 成立的是_____ (填序号).
5. 在四边形ABCD中,若 $\vec{AB} = \vec{DC}$ 且 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$,则四边形ABCD的形状为_____.

学习目标

1. 掌握向量的加法和减法运算法则.
2. 掌握向量的加法和减法运算律.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 向量的加法

(1) 向量加法的三角形法则:

已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和, 记作 $\vec{a} + \vec{b}$, 即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 向量加法的平行四边形法则:

以同一点 O 为起点的两个向量 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和.

2. 向量的减法

已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}} = \vec{a} - \vec{b}$. 即 $\vec{a} - \vec{b}$ 表示从向量 $\vec{b}$ 的终点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量.

练习导学

1. 向量加法满足交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$;

向量加法也满足结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.

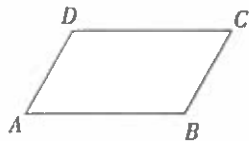
2. 向量的减法可以转化为向量的加法:

$$\vec{a} - \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}.$$

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 向量的加减运算

【例1】如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 ()



- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

规律方法

应用平行四边形法则进行向量加减运算时, 需要首先将向量的起点平移至重合, 减法的口诀是: “指向被减向量”, 即差向量由原向量的终点构成, 且指向被减向量的终点方向.

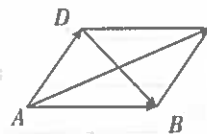
跟踪演练①

下列四式不能化简为 $\overrightarrow{AD}$ 的是 ()

- A. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BM}$
B. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM})$
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$
D. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD}$

要点二 向量的简单分解

【例2】如图, 已知平行四边形 $ABCD$, 用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示下列向量.



(1) 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{DA} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

规律方法

在后续的学习过程中我们常常会遇到将一个向量分解为其他向量的加减组合 (即线性表示), 当选定一组向量为基准, 平行四边形中的其他向量结合题目的条件都可以化归为这组基准的加减组合.

跟踪演练②

已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 设 $\vec{a}$ 表示“向东走 2 千米”, $\vec{b}$ 表示“向西走 1 千米”, $\vec{c}$ 表示“向南走 2 千米”, $\vec{d}$ 表示“向北走 1 千米”, 说明下列向量的意义.

(1) $\vec{a} + \vec{a}$: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $\vec{a} + \vec{c}$: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$: _____;

(4) $\vec{c} + \vec{b} + \vec{d}$: _____.

2. 已知 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, 且 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 两两夹角都是 120° , 则 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$ _____.

3. 判断题:

(1) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$. ()

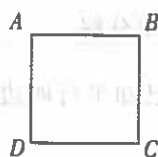
(2) $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$. ()

(3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. ()

(4) $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BO} - \vec{AO}$. ()

(5) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$. ()

4. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 为边长为 1 的正方形, 求下列向量的模:



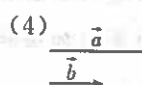
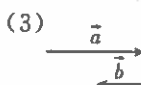
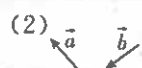
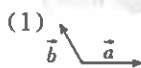
$|\vec{AB} + \vec{BC}| =$ _____;

$|\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC}| =$ _____;

$|\vec{AB} + \vec{BD} - \vec{AC}| =$ _____;

$|\vec{AC} - \vec{BD}| =$ _____.

5. 已知下列各组向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 求作 $\vec{a} + \vec{b}$.



学习目标

1. 掌握向量平行的充要条件.
2. 理解实数与向量的乘法意义.
3. 掌握实数与向量的乘法运算律.
4. 掌握实数与向量乘法的简单应用.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个 _____, 记作 $\lambda \vec{a}$, 其中 λ 叫做向量 $\vec{a}$ 的系数.

它的长度与方向规定如下:

(1) $|\lambda \vec{a}| =$ _____;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ _____;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ _____.

(3) 特别地, 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \vec{a} =$ _____;

当 $\vec{a} = \vec{0}$ 时, $\lambda \vec{a} =$ _____.

预习导学

1. 向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 平行的充要条件是: 存在实数 λ , 使得 $\vec{b} =$ _____.

2. 实数与向量的乘法满足下列运算律:

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有

$\lambda(\mu \vec{a}) =$ _____;

$(\lambda + \mu)\vec{a} =$ _____;

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

3. 给定一个非零向量 $\vec{a}$, 与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量叫做 _____, 记作 $\vec{a}_0$, 可知 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$, $\vec{a}_0 =$ _____.

4. 向量的加法、减法以及实数与向量的乘法, 统称为 _____. 从一个或几个向量出发, 通过线性运算得到的新向量称为原来那些向量的 _____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

重点一 实数与向量乘法的运算律

【例1】若 $\vec{a}, \vec{b}$ 为已知向量, 且 $\frac{2}{3}(4\vec{a} - 3\vec{c}) + 3(5\vec{c} - 4\vec{b}) = \vec{0}$, 则 $\vec{c} =$ _____.

规律方法

因为实数与向量乘法具有良好的运算律, 故而可以参考多项式的化简方法, 快速化简向量的“数乘”运算.

跟踪演练 1

化简:

(1) $5(3\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(2\vec{b} - 3\vec{a})$;

(2) $\frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b}) - \frac{1}{4}(3\vec{a} - 2\vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

(3) $(x+y)\vec{a} - (x-y)\vec{a}$.

重点二 平行的判定与应用

【例2】在 $\triangle OAB$ 中, $4\vec{OP} = 3\vec{OA} + \vec{OB}$, 判断 A, B, P 是否三点共线.

规律方法

1. 在向量的相关问题中, 常常会需要判定两个向量是否平行, 以下是常用结论: 设非零向量 $\vec{b}$, 则“向量 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的充要条件是“存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ”.

2. 利用向量平行的位置关系来说明相关三点的共线, 是向量平行的一个重要应用.

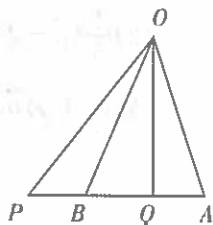
跟踪演练 2

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是不平行的两个非零向量, 已知 $\vec{AB} = 2\vec{a} + p\vec{b}, \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{CD} = \vec{a} - 2\vec{b}$, 若 A, B, D 三点共线, 则 p 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. -2 D. -1

要点三 简单的向量线性组合

【例 3】如图, 已知 $\vec{AP} = \frac{4}{3}\vec{AB}, \vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, 试用 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 表示 $\vec{OP}$.



规律方法

任意一个向量都可以表示为两个不平行向量的线性组合, 这两个不平行向量往往被称为“基向量”. 在具体的解题过程中, 应当将结合向量的加减运算法则, 将目标向量逐步向“基向量”靠拢. 必要的时候, 可以将题干中的其他向量先用“基向量”线性组合出来.

跟踪演练 3

在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\vec{AB} = \vec{c}, \vec{AC} = \vec{b}$, 若点 D 满足 $\vec{BD} = 2\vec{DC}$, 则 $\vec{AD}$ 可用 $\vec{b}, \vec{c}$ 表示为 _____.

要点四 单位向量的应用

【例 4】若 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 平分线上的向量 $\vec{OM}$ 可以是 ()

- A. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ B. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$
C. $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$ D. $\frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$

规律方法

将向量单位化, 可以在尽量减少模长影响的前提下, 保留向量的方向性. 方便多个向量方向 (或夹角) 的研究, 将非零向量除以自身的模长, 就可以得到该向量的单位向量.

跟踪演练 4

已知 $\triangle ABC$, 若点 P 满足 $\vec{AP} = \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心
C. 垂心 D. 重心



当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 化简下列向量线性运算:

(1) $5(3\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(2\vec{b} - 3\vec{a}) =$ _____;

(2) $\frac{1}{2}[(3\vec{a} - 2\vec{b}) + 5\vec{a} - \frac{1}{3}(6\vec{a} - 9\vec{b})] =$ _____;

(3) $(2\vec{AB} + \vec{AC}) + (\vec{BA} - 2\vec{AC}) + \vec{BC} =$ _____.

2. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\vec{AC} = \vec{a}, \vec{BD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示下列向量:

$\vec{AB} =$ _____, $\vec{BC} =$ _____.

3. 点 C 在线段 AB 上, 且 $\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{5}{2}$, 则 $\vec{AC} =$ _____ $\vec{AB}$, $\vec{BC} =$ _____ $\vec{AB}$.

4. 已知 $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$, 则向量 $\vec{b}$ 的单位向量 $\vec{b}_0 =$ _____.

(用 $\vec{a}$ 表示)

5. 作图验证:

$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a};$

$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}.$

8.2 向量的数量积

第①课时 向量的投影

学习目标

1. 掌握向量的投影和数量投影的概念, 理解数量投影和投影之间的关系.
2. 理解向量的夹角概念.
3. 理解数量投影的正、负或零与向量夹角之间的联系.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

向量夹角的范围是_____. 当夹角为_____时, 称向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 垂直, 记作_____.

预习导学

1. 向量的夹角

对于两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果以 O 为起点, 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 那么射线 OA 与 OB 的夹角 θ 叫做向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角, θ 的取值范围是_____.

「问题 1」在 $\triangle ABC$ 中, 向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 的夹角是 $\angle ABC$ 吗?

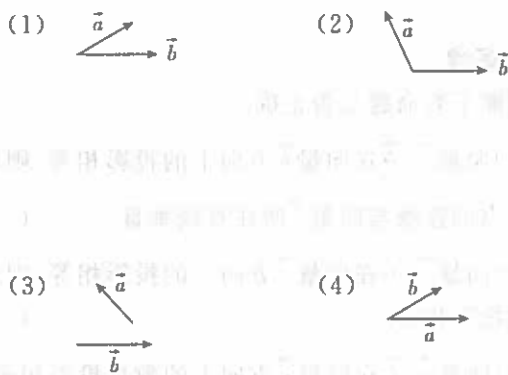
2. 若 θ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为_____, 数量投影是_____.

「问题 2」投影与数量投影的联系与区别是什么?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

重点一 投影向量的概念

【例 1】画出下图中向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上投影向量.



规律方法

要注意审题, 明确是以哪个向量为基准的投影向量. 一般情况下, 向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量与向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量不是同一个向量. 但投影向量具有以下性质: 和向量的投影等于投影向量的和. 这一性质, 对数乘运算也成立.

跟踪演练

若向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上投影向量与向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影向量相等, 你能发现向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的特殊关系吗?

要点三 投影的应用

【例2】设向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_{2021}}$, 若 $\overrightarrow{OP_i}$ ($i=1, \dots, 2021$)在 $\overrightarrow{OP}$ 方向上的投影相等, 则点 P_i ($i=1, \dots, 2021$) ()

- A. 共线 B. 共圆
C. 在 $\overrightarrow{OP}$ 所在直线的一侧 D. 以上都不对

规律方法

不同向量在另一个非零向量上的投影向量可以是相等的, 所以投影向量相等不代表被投影的向量相等.

跟踪演练2

判断下列命题是否正确.

(1) 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在向量 $\vec{c}$ 方向上的投影相等, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 终点的连线与向量 $\vec{c}$ 所在直线垂直. ()

(2) 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在向量 $\vec{c}$ 方向上的投影相等, 则对应的数量投影相等. ()

(3) 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在向量 $\vec{c}$ 方向上的数量投影相等, 则对应的投影相等. ()

要点三 数量投影与夹角

【例3】(1) 已知 $|\vec{a}|=5$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影为4, 求 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

(2) 已知正三角形 ABC 的边长为1, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的数量投影.

规律方法

1. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影的值与 $\vec{b}$ 的模长无关.
2. 在平面多边形的情境下, 需要利用该多边形本身的边长或内角的隐含条件, 且充分注意相应的夹角是多边形内角还是其补角.

跟踪演练3

已知 $|\vec{a}|=4$, $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 120° , 求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影.

当堂检测

1. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影为1, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.
2. 已知向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的数量投影为_____.
3. 已知向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为_____.
4. 已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0.8$, 求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影.

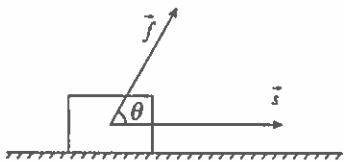
学习目标

1. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义.
2. 掌握向量数量积的概念和几何意义.
3. 理解向量数量积的性质及运算律.
4. 会进行平面向量数量积的运算,能运用向量的数量积计算两个向量的夹角,会用向量的数量积判断两个平面向量的垂直关系.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 如图所示,在一个光滑的水平面上,我们拖动一个物体,如果拖力 $\vec{f}$ 的方向与物体移动的方向成 θ 角,而物体在力 $\vec{f}$ 的作用下产生的位移为 $\vec{s}$,那么力 $\vec{f}$ 所做的功是_____.



2. 实数乘法满足以下运算律:

设 a, b 是两个实数,则 $ab = ba, (ab)c = a(bc) = b(ac), a(b+c) = ab+ac$.

预习导学

1. 向量的数量积

如果两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$,那么我们把_____叫做向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的数量积,记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$,即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$. 特别地, $\vec{a} \cdot \vec{a}$ 简记为 $\vec{a}^2$.

规定:零向量与任意向量的数量积为0.

注意:(1)两个向量的数量积是一个实数,而不是向量,它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦值的乘积,其符号由夹角的锐、直或钝角决定:

- ①若两个非零向量的夹角为 0° 或锐角,则其数量积为正;
- ②夹角为 π 或钝角,则其数量积为负;
- ③夹角为 $\frac{\pi}{2}$,则其数量积为0.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 不能写成 $\vec{a} \times \vec{b}$ 或 $\vec{a} \vec{b}$.

「问题1」“若两个非零向量的数量积为正,则其夹角为锐角”,这个说法正确吗?

2. 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义

两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积是其中的一个向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 与另一个向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 的方向上的数量投影 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的乘积.

注意: $|\vec{b}| \cos \theta$ 是向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的数量投影. ①当 θ 为锐角时,数量投影是正值;②当 θ 为钝角时,数量投影是负值;③当 θ 为直角时,数量投影是0;④当 $\theta=0$ 时,数量投影是 $|\vec{b}|$;⑤当 $\theta=\pi$ 时,数量投影是 $-|\vec{b}|$.

3. 数量积的运算律:

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 是向量, λ 是实数,则

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0, \text{ 当且仅当 } \vec{a} = \vec{0} \text{ 时, } \vec{a} = \vec{0}.$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$(3) (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

$$(4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

注意:向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积还有以下性质:

$$(1) \vec{a} \perp \vec{b} \text{ 当且仅当 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$(2) |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|, \text{ 当且仅当 } \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ 时等号成立.}$$

「问题2」当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时,由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 能否推出 $\vec{b} = \vec{0}$?

「问题3」 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 成立吗?

4. 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角公式为: $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

要点一 平面向量数量积的运算

【例1】(1)已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 求:

① $\vec{a} \cdot \vec{b}$; ② $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$; ③ $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$.

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于 ()

- A. -16 B. -8 C. 8 D. 16

规律方法

1. 向量和或差的数量积, 可利用运算律展开, 其结果可以参考实数的多项式展开.

2. 求解与图形有关的两个向量的数量积时要注意向量的夹角及数量积几何意义的应用.

跟踪演练①

(1)已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60^\circ, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5$, 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ _____.

(2)已知点 A, B, C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3, |\overrightarrow{BC}|=4, |\overrightarrow{CA}|=5$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值是 _____.

要点二 向量的夹角与向量的模

【例2】已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所成的角为 $\frac{5}{6}\pi$, 且 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$, 求 $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$ 以及 $3\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角.

规律方法

1. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非坐标形式出现的, 求向量 $\vec{a}$ 的模可应用公式 $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, 先求向量模的平方, 再通过向量数量积的运算求解. 若在题目的已知条件中出现向量的模, 也需利用此公式处理.

2. 注意向量运算律与实数运算律的区别和联系. 在向量的运算中, 灵活运用运算律, 以达到简化运算的目的.

跟踪演练②

已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a} - \vec{b}|=\sqrt{7}$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}, |\vec{a} + \vec{b}|$.

要点三 数量积与向量的垂直

【例3】已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\overrightarrow{AB}|=3, |\overrightarrow{AC}|=2$. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$, 求实数 λ 的值.

规律方法

1. 注意 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 的应用.

2. 注意使用化归思想, 当题目中出现多个向量时, 可以先选中两个不平行的向量作为基准, 以这两个向量表示其他向量, 从而梳理向量间潜在的关系.

跟踪演练③

已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $\vec{c}=3\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{d}=m\vec{a}-3\vec{b}$, 求当 m 取何值时, $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直.



当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 .
2. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$.
3. 已知向量 $\vec{OA} \perp \vec{AB}$, $|\vec{OA}|=3$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}=$.

4. 已知 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, 当 (1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; (2) $\vec{a} \perp \vec{b}$; (3) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 30° 时, 分别求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积.

5. 已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角是 $\frac{2}{3}\pi$, $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$, 则实数 λ 取何值时, $\vec{p} \perp \vec{q}$?

8.3 向量的坐标表示

第①课时 向量基本定理

学习目标

1. 理解和掌握平面向量基本定理.
2. 掌握基的概念, 能够用基表示平面内的任一向量.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

基本单位向量: 在平面直角坐标系内, 方向分别与 x 轴和 y 轴 相同的两个 向量叫做基本单位向量, 记为 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$.

预习导学

向量基本定理:

如果 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是平面上两个不平行的向量, 那么该平面上的任意向量 $\vec{a}$, 都可唯一地表示为 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 的线性组合, 即存在唯一的一对实数 λ 与 μ , 使得 $\vec{a} =$.

平面上任意两个 的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 都组成平面向量的一个基.

注意: (1) 平面内的任意向量都可以沿两个不平行的方向分解成两个向量和的形式.

(2) $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不一定互相垂直, 也不一定是单位向量.

(3) λ, μ 是唯一的.

「问题 1」向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 能否是零向量?

「问题 2」什么样的两个向量可以作为平面向量的一个基?

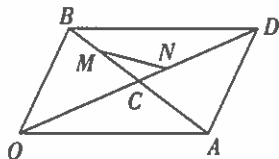
「问题 3」一个平面有几个基?

「问题 4」 O 是直线 AB 外一点, 由平面向量分解定理得 $\vec{OC} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$, λ, μ 满足什么条件时, A, B, C 三点共线?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 用基表示向量

【例 1】如图所示, 以向量 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ 为邻边的平行四边形 $OADB$ 中, C 为 AB 与 OD 的交点, $\vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BC}, \vec{CN} = \frac{1}{3} \vec{CD}$, 试以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为基表示 $\vec{MN}$.



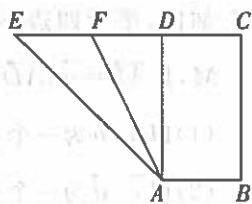
规律方法

1. 用基表示向量, 实质就是向量的加、减、数乘运算, 选用从同一顶点出发的两个向量或首尾相连的向量作为基, 把已知向量转化为与未知向量有直接关系的向量求解.

2. 在解题过程中应充分利用平面几何的一些定理, 如三角形的中位线、相似三角形对应边成比例等.

跟踪演练 ①

已知矩形 $ABCD$, 且 $AD=2AB$, 又 $\triangle ADE$ 为等腰直角三角形, F 为 ED 的中点, $\overrightarrow{EA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{EF}=\vec{e}_2$, 以 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为基, 试表示向量 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 及 $\overrightarrow{BD}$.



规律方法

1. $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面内两个不平行的向量, 若 $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}$, 且 $\vec{c}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$, 则 $x_1=x_2$, 且 $y_1=y_2$.

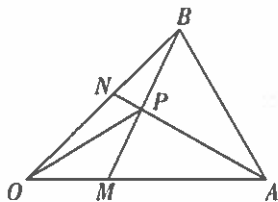
2. 若点 P 在线段 AB 上, 则可设 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}$ ($0 \leq m \leq 1$).

跟踪演练 ②

一条直线经过 $\triangle ABO$ 的重心 G , 分别交边 OA, OB 于点 P, Q , 若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}=y\overrightarrow{OB}$ ($x, y \neq 0$), 求证: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

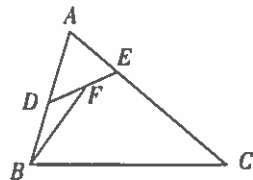
要点二 向量基本定理的应用

【例 2】在 $\triangle OAB$ 中, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$, M, N 分别是边 OA, OB 上的点, 且 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{b}$, 设 $\overrightarrow{AN}$ 与 $\overrightarrow{BM}$ 相交于 P , 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.



要点三 平面向量基本定理与数量积的综合应用

【例 3】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=4, AC=6, \angle BAC=60^\circ$, D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$, 点 F 为 DE 的中点, 求 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE}$.



规律方法

1. 解决与几何图形有关的向量问题的常用方法是将涉及的向量用基表示, 然后进行运算求解, 所以根据条件, 选取适当的基是非常重要的.

2. 常把已知长度或夹角的有公共端点的两个向量作为基.

跟踪演练③

已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$.

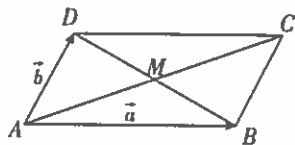
3. 已知 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边的中点, 用向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD} =$ _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

5. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M , 且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{MA} = \vec{c}, \overrightarrow{MB} = \vec{d}$.

(1) 以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为一个基表示 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$;

(2) 以 $\vec{c}, \vec{d}$ 为一个基表示 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$.



用基底表示本基量

例 1 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面内的一组基, 且 $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, 求 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影.

解 设 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为 $\vec{p}$, 则 $\vec{p} = \lambda\vec{a}$, 且 $\vec{c} - \vec{p} \perp \vec{a}$, 即 $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$.

解得 $\lambda = 2$, 故 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为 $2\vec{a}$.



当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 若已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面上的一组基, 则下列各组向量中不能作为基的一组是 ()

A. $\vec{e}_1$ 与 $-\vec{e}_2$ B. $3\vec{e}_1$ 与 $2\vec{e}_2$

C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ D. $\vec{e}_1$ 与 $2\vec{e}_1$

2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

学习目标

1. 掌握平面向量的正交分解.
2. 掌握并理解平面向量的坐标的概念, 掌握向量的坐标运算律.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 将向量 $\vec{a}$ 的起点置于坐标原点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, 则 $\vec{OA}$ 叫做位置向量, 如果点 A 的坐标为 (x, y) , 它在 x 轴、 y 轴上的投影分别为 M, N , 那么 $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{ON}$, $\vec{a} = \vec{OA} = \underline{\hspace{1cm}} \vec{i} + \underline{\hspace{1cm}} \vec{j}$.
2. 向量的正交分解: 向量 $\vec{OA}$ 能表示成两个相互 垂直 的向量 $\vec{i}, \vec{j}$ 的线性组合, 即 $\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j}$, 这种向量的表示方法叫做向量的正交分解. 把有序实数对 (x, y) 叫做向量的坐标, 记为 $\vec{a} = \underline{\hspace{1cm}}$.
3. 以点 $P_1(x_1, y_1)$ 为起点, 点 $P_2(x_2, y_2)$ 为终点的向量 $\vec{P_1P_2}$ 的坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 记作 $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

预习导学

1. 向量的坐标运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = \underline{\hspace{1cm}}; \vec{a} - \vec{b} = \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\lambda \vec{a} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

2. 向量的模

设 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $|\vec{a}| = \underline{\hspace{1cm}}$.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 向量的坐标运算

【例1】已知 $A(1, -2), B(2, 1), C(3, 2), D(-2, 3)$.

(1) 求 $\vec{AD} + 2\vec{BD} - 3\vec{BC}$;

(2) 设 $\vec{CM} = 3\vec{CA}$, $\vec{CN} = -2\vec{BC}$, 求 $\vec{MN}$ 及点 M, N 的坐标.

规律方法

1. 向量 $\vec{P_1P_2}$ 的坐标等于 P_2 的坐标减去 P_1 的坐标, 即终点坐标减起点坐标.

2. 向量坐标的相等就是对应的横坐标、纵坐标分别相等, 往往可以得到一个二元方程组, 所以要注意方程思想的应用.

跟踪演练

已知 $A(-2, 4), B(3, -1), C(-3, -4)$. 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CA} = \vec{c}$, 且 $\vec{CM} = 3\vec{c}$, $\vec{CN} = -2\vec{b}$.

(1) 求 $3\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$;

(2) 求满足 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ 的实数 m, n ;

(3) 求 M, N 的坐标及向量 $\vec{MN}$ 的模.

【例 2】已知点 $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(4,5)$ 及 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$.

(1) 当 t 为何值时, P 在 x 轴上? P 在 y 轴上? P 在第二象限?

(2) 四边形 $OABP$ 能否构成平行四边形? 若能, 求出相应的 t 值; 若不能, 请说明理由.

规律方法

利用向量的坐标运算, 可以将几何问题转化为代数问题处理, 注意平行四边形的对边所对应的向量相等这一条件的应用.

跟踪演练 2

已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A, B, C 的坐标分别为 $(-2,1)$, $(-1,3)$, $(3,4)$, 求顶点 D 的坐标.

1. 已知平面向量 $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (1,-1)$, 则向量 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} =$ _____.
2. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 为一条对角线, 若 $\vec{AB} = (2,4)$, $\vec{AC} = (1,3)$, 则 $\vec{BD} =$ _____.
3. 已知 $\vec{a} = (1,0)$, $\vec{b} = (2,1)$, 则 $|\vec{a} + 3\vec{b}| =$ _____.
4. 已知向量 $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (1,-2)$, 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9,-8)$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 则 $m-n$ 的值为 _____.
5. 已知平面内有三个点 $A(1,-2)$, $B(7,0)$, $C(-5,6)$, 求 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AB} - \vec{AC}$, $2\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{AB} - 3\vec{AC}$.

学习目标

1. 掌握向量数量积的坐标表示.
2. 掌握向量的夹角公式的坐标表示.
3. 掌握求向量的模、求两个向量的夹角、判断两个向量垂直的方法.
4. 初步运用向量的方法解决一些简单的几何问题.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 如果两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, 那么我们把 _____ 叫做向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的数量积, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$. 特别地, $\vec{a} \cdot \vec{a}$ 记作 $\vec{a}^2$.
2. (1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
(2) $\cos \theta =$ _____.
3. 设 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $|\vec{a}| =$ _____.

预习导学

1. 向量数量积的坐标表示

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____, 即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

2. 两个向量的夹角公式的坐标表示

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$,

则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} =$ _____.

3. 两个向量垂直的充要条件的坐标表示

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ $\Leftrightarrow$ _____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 平面向量数量积的坐标运算

【例1】(1) 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, -4)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

(2) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为 _____; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 _____.

规律方法

两个向量的数量积用坐标表示后, 求两个向量的

数量积的关键就是求这两个向量的坐标, 将平面向量的“定性”研究化归为代数的“定量”分析, 对于与几何图形有关的数量积问题, 通过建立坐标系, 利用数量积的坐标表示求解, 可简化计算.

跟踪演练 ①

(1) 已知 $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (3, -4)$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 9$, 求 $\vec{c}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6$, $BC = 4$, D 是 AC 的中点, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

要点二 向量的夹角与向量的模

【例2】(1) 已知 $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{m} = \vec{a} - \lambda \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 按下列条件求实数 λ 的值.

① $\vec{m} \perp \vec{n}$; ② $\vec{m} \parallel \vec{n}$; ③ $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

(2) 已知 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (\lambda, 3)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 求 λ 的取值范围.

规律方法

1. 注意向量平行与向量垂直的坐标表示的不同, 避免出错. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

2. $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个非零向量, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 则其夹角为锐角或 0° ; 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则其夹角为钝角或 180° ; 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则其夹角为 90° .

跟踪演练 2

(1) 设向量 $\vec{a} = (1, 2m)$, $\vec{b} = (m+1, 1)$, $\vec{c} = (2, m)$. 若 $(\vec{a} + \vec{c}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| =$ _____.

(2) 已知点 $A(1, 0), B(3, 1), C(2, 0)$, 且 $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

(3) 若向量 $\vec{a} = (-1, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 的方向相同, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-1, 1)$
C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

要点三 向量的数量积与三角函数的综合

【例 3】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n} = (\sin x, \cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 求 $\tan x$ 的值;

(2) 若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值.

规律方法

解决向量的数量积与三角函数的综合问题时, 先将向量问题转化为三角问题, 然后利用三角函数的相关知识求解.

跟踪演练 3

已知平面上的两个向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$), $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求证: 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直;

(2) 当向量 $\sqrt{3}\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$ 的模相等时, 求 α 的大小.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 设 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-3, 4)$, $\vec{c} = (3, 2)$, 则 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____ ()

- A. $(-15, 12)$ B. 0
C. -3 D. -11

2. 已知 $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 满足条件 $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$ 与 $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$ 的向量 $\vec{x} =$ _____.

3. 已知 $\vec{a} = (3k, 3)$, $\vec{b} = (-6, k-7)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 k 的值为 _____.

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-1, 0)$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

5. 已知向量 $\vec{a} = (4, 5\cos \alpha)$, $\vec{b} = (3, -4\tan \alpha)$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求:

(1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; (2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

8.4 向量的应用

第①课时 向量的应用(1)

学习目标

1. 初步掌握应用向量解决平面几何问题的基本方法.
2. 体会向量是一种处理几何问题的有力工具.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为非零向量, 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$ _____
(其中 λ 为非零实数).
2. 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____
_____;
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ $\Leftrightarrow$ _____.

预习导学

1. 用向量解决平面几何问题的基本步骤

- (1) 建立平面几何与向量的联系, 用向量表示问题中涉及的几何元素, 将平面几何问题转化为向量问题;
- (2) 通过向量运算, 研究几何元素之间的关系;
- (3) 把运算结果“翻译”成几何元素.

2. 利用向量解决几何问题的方法

利用向量解决几何问题时, 一般从以下两方面考虑: 一是利用向量的基, 二是利用向量的坐标.

- (1) 利用向量的基. 将有关向量用基表示;
- (2) 利用向量的坐标. 一般先建立适当的平面直角坐标系, 确定相关点的坐标, 进而求得相关向量的坐标, 然后利用向量运算的坐标形式解决问题.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 利用基解决平面几何问题

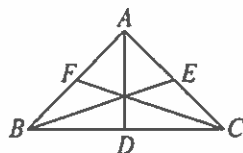
【例 1】证明平行四边形四边平方和等于两对角线的平方和.

规律方法

利用向量的基解决几何问题的关键是选取向量的基, 一般选取长度或夹角易知的有公共端点的两条线段所对应的向量作为基.

跟踪演练①

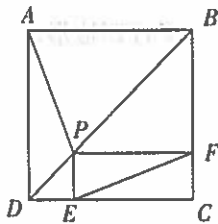
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, E, F 分别为边 AB, BC 上的点, 且 $AE = EB$, $2BF = FC$. 求证: $CE \perp AF$.



要点二 利用向量的坐标解决平面几何问题

【例 2】在正方形 $ABCD$ 中, P 为线段 BD 上任一点, 四边形 $PECF$ 为矩形, 求证:

- (1) $PA = EF$;
- (2) $PA \perp EF$.



规律方法

利用向量的坐标解决几何问题的关键是建立适当的坐标系,求出点的坐标,在建立坐标系时,尽量让图形上尽可能多的点落在坐标轴上.

跟踪演练②

在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F 分别为 AB, BC 的中点,用向量方法证明: $AF \perp DE$.



当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 已知点 $A(-2, -3), B(19, 4), C(-1, -6)$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形
C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

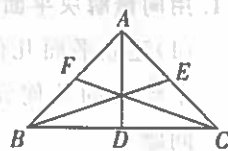
2. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, 则四边形 $ABCD$ 的形状是 _____.

3. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 是对角线 AC 上的两点, 且 $AE = FC = \frac{1}{4}AC$. 证明: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.



4. 已知 BD, CE 是等腰 $\triangle ABC$ 的两腰中线, 且 $BD \perp CE$, 求顶角 A 的大小.

5. 已知 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是三边中点. 求证: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.



学习目标

1. 培养学生自觉使用向量解决实际问题的意识.
2. 初步掌握应用向量解决三角问题和力学问题的基本方法.
3. 通过用向量方法解决问题的过程, 体会向量是一种处理问题的有力工具.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 且为非零向量, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.
2. 设 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $|\vec{a}| =$ _____.
3. 向量的加法满足三角形法则和平行四边形法则.

预习导学

1. 向量在代数问题中的应用

对于一些代数问题, 我们利用向量求解, 可使解题过程简洁、清晰.

2. 向量在物理中的应用

运用向量解决物理问题时, 必须清楚哪些物理量是向量, 可以从以下几方面理解:

- (1) 力, 速度, 加速度都是向量;
- (2) 力, 速度, 加速度, 位移的合成与分解是向量的加减法, 运动的叠加也用到向量的合成;
- (3) 动量 $m\vec{v}$ 是数乘向量;
- (4) 力做的功的实质就是力在物体前进方向上的分力与物体位移的乘积, 它的实质是向量的数量积.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 向量在三角中的应用

【例1】已知在 $\triangle ABC$ 中, BC, CA, AB 的长分别为 a, b, c , 用向量方法证明: $a = b\cos C + c\cos B$.

规律方法

用向量方法解决三角问题时, 注意向量的模及夹角公式的应用.

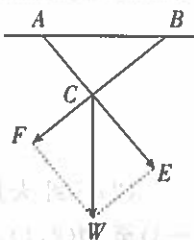
跟踪演练 1

用向量方法证明余弦定理:

已知在 $\triangle ABC$ 中, BC, CA, AB 的长分别为 a, b, c , 求证: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

要点二 向量在物理中的应用

【例2】(1) 用两根绳子把重 10 N 的物体吊在水平杆子 AB 上, $\angle ACW = 150^\circ$, $\angle BCW = 120^\circ$, 求 A 和 B 处所受力的大小. (忽略绳子重量)



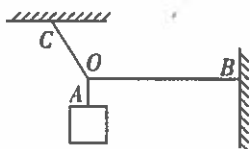
(2) 一个物体在一个平面内受到三个力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ 的作用下沿合力方向移动了 10 米, 求合力做的功和位移. 其中 $|\vec{F}_1| = 10$ N, 方向为北偏东 30° ; $|\vec{F}_2| = 8$ N, 方向为东偏北 30° ; $|\vec{F}_3| = 6$ N, 方向为北偏西 30° .

规律方法

向量在物理中的应用,实际上是把物理问题转化为向量问题,然后通过向量运算解决向量问题,最后用所获得的结果解释物理现象.注意作出相应的几何图形,利用数形结合的思想思考问题,以帮助建立数学模型.

跟踪演练②

(1)已知 OA, OB, OC 为三条细绳,绳子一端 B, C 分别被固定在墙上, A 处悬挂一重量为 30 N 的物体,其中 $\angle AOB = 90^\circ, \angle BOC = 120^\circ$,若此物体保持静止,求三条细绳 OA, OB, OC 上所受到的力的大小.



(2)三纤夫用纤绳拉船,船的航行方向由 $N(5, -3)$ 至 $M(2, 1)$,若三纤夫所用力分别为 $\vec{F}_1 = (1, 4), \vec{F}_2 = (3, -2), \vec{F}_3 = (0, 4)$,则三纤夫对船所做的功为_____.

要点三 构造向量求解代数问题

【例3】已知 a, b 是不相等的两个正数,求证: $(a+b)(a^3+b^3) > (a^2+b^2)^2$.

规律方法

利用平面向量的性质 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 及其变形可以解决与不等式有关的数学问题,关键是将条件式转化为向量的坐标表示,然后才能套用公式求解(求证),注意等号成立的条件.

跟踪演练③

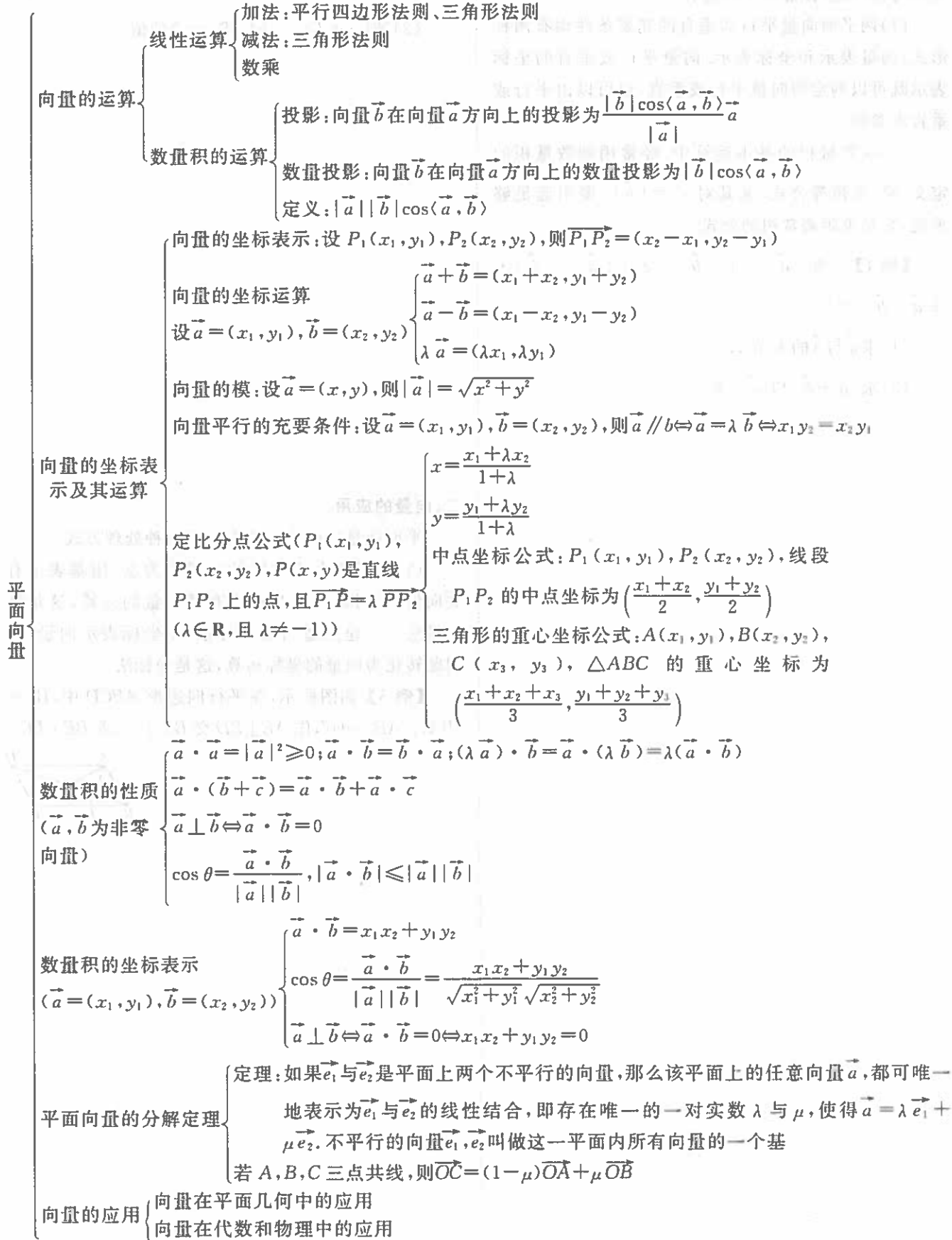
已知 $a, b \in (0, +\infty)$ 且 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 求证: $a^2 + b^2 = 1$.



典例精析

DANGTANG JIANCE

- 三个大小相等的力作用于同一点,欲使合力为零,则每两个力之间的角度为_____.
- 已知 $\vec{F}_1 = (5, 4), \vec{F}_2 = (-2, 1)$ 作用于同一质点,由 $A(8, 0)$ 移动到点 $B(20, 15)$,合力 $\vec{F}$ 对质点所做的功为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \sqrt{3}|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| = 3\vec{BC}^2$,求角 A, B, C 的大小.
- 已知 $a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 1$,其中 $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. 求证: $-1 \leq ax + by \leq 1$.
- 已知质点 O 受到三个力 $\vec{OF}_1, \vec{OF}_2, \vec{OF}_3$ 的作用,若它们的大小分别为 $|\vec{OF}_1| = 20\text{ N}, |\vec{OF}_2| = 30\text{ N}, |\vec{OF}_3| = 40\text{ N}$,且三个力之间的夹角都为 120° ,求合力的大小和方向.



一、向量的运算

向量的运算主要是向量的数量积、平行与垂直、夹角与模问题. 注意以下问题:

(1) 两平面向量平行和垂直的充要条件均有两种形式: 向量表示和坐标表示. 向量平行或垂直的坐标表示既可以判定两向量平行或垂直, 也可以由平行或垂直求参数.

(2) 在数量积的基本运算中, 经常用到数量积的定义、模、夹角等公式, 尤其对 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ 要引起足够重视, 它是求距离常用的公式.

【例 1】已知 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$.

(1) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ ;

(2) 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 和 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

【例 2】已知向量 $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{b} = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$, $0 < \theta < \pi$.

(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求角 θ 的大小;

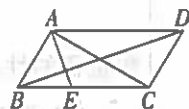
(2) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}|$, 求 $\sin \theta$ 的值.

二、向量的应用

平面向量的应用主要有以下两种处理方式:

(1) 选择两个不共线的向量作为基, 用基表示有关向量, 把问题转化为只含有基向量的运算, 这是基向量法. (2) 建立适当的坐标系, 用坐标表示向量, 把问题转化为向量的坐标运算, 这是坐标法.

【例 3】如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BC = 2BA$, $\angle ABC = 60^\circ$, 作 $AE \perp BD$ 交 BC 于 E , 求 $BE : EC$.



三、函数与方程思想

1. 函数思想是指用联系变化的观点去分析问题,通过函数的形式把问题中的数量关系表示出来,运用函数的概念、图像、性质等对问题进行研究,使问题获得解决.

2. 方程思想是指通过设元,寻找已知与未知之间的等量关系,构造方程或方程组,然后求解,完成已知向未知的转化的思想.

3. 向量的相等、平行、垂直、数量积的定义及性质的应用都体现了函数与方程思想,运用该思想可解决求向量或点的坐标,求参数的值,用已知向量表示未知向量等问题.

【例 4】在 $\triangle OAB$ 的边 OA, OB 上分别有一点 P, Q , 已知 $OP:PA=1:2, OQ:QB=3:2$, 连接 AQ, BP , 设它们交于点 R , 若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

(1) 用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OR}$;

(2) 若 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 过 R 作 $RH \perp AB$ 交 AB 于 H , 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OH}$.

四、数形结合思想

向量本身既具有大小, 又具有方向, 可以用几何法表示, 而向量又有良好的运算性质——坐标运算, 可把向量与数联系起来, 这样向量具备了“数”与“形”的两方面特征, 可用数形结合的方法来解决相关问题.

【例 5】已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个 nonzero 向量, 且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$, 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 夹角的大小.

【例 6】已知向量 $\vec{a}=(\cos x, \sin x), \vec{b}=(\cos y, \sin y)$, 其中 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, 试求 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值.



名教联盟

