



上海重点高中标准题 · 咻咻一顿刷

高中数学 第7章

慕课 & 思度

校稿 UyNehc



第7章 三角函数

7.1 正弦函数的图像与性质

第①课时 正弦函数的图像

学习目标

1. 理解和掌握正弦函数的概念.
2. 掌握正弦曲线的绘制过程.
3. 会用“五点法”绘制 $y = \sin x$ 及简单的正弦型函数在一个周期内的大致图像.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 请作出下列各角的正弦线:

(1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{5\pi}{6}$; (3) $\frac{25\pi}{3}$.

2. 作函数图像最基本的方法是_____，其步骤是_____、_____、_____.

3. 设 $k \in \mathbb{Z}$, 则 $\sin(x + 2k\pi) =$ _____.

预习导学

1. 正弦函数

任意一个实数 x 都对应着唯一确定的角, 而这个角又对应着唯一确定的正弦值 $\sin x$, 这样, 对任意一个实数 x 都有_____的值 $\sin x$ 与它对应, 按照这个对应法则所建立的函数, 表示为 $y = \sin x$, 它叫做_____函数. 它的定义域是_____.

「问题 1」要构成一个函数需要满足怎样的对应关系?

2. “五点法”画图

正弦函数					
------	--	--	--	--	--

「问题 2」“五点法”画图的点有什么特点?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 五点法作正弦型函数在指定范围内的简图

【例 1】按要求作图:

用“五点法”作出 $y = \sin x - 1, x \in [0, 2\pi]$ 的简图.

规律方法

掌握五点法作图, 要知道五点法中哪五个点是波状图的关键五点.

跟踪演练 ①

用“五点法”作出 $y = 2 + \sin x, x \in [-\pi, \pi]$ 的简图.

【例2】利用图像变换法作出 $y=|\sin x|, x \in [0, 4\pi]$ 的简图, 并说明该图像如何由正弦曲线的相关部分通过图像变换得到.

规律方法

函数的图像变换除了平移变换外, 还有对称变换, 一般地, 函数 $f(-x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称; $-f(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称; $-f(-x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于原点对称; $f(|x|)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称; 将 $y=f(x)$ 的图像 x 轴下方的图像翻折到 x 轴上方(原 x 轴上方部分不变)可得 $y=|f(x)|$ 的图像.

跟踪演练 2

用五点法作出函数 $y=-\sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的简图, 并说明该图像如何由正弦曲线的相关部分通过图像变换得到.

重点三 正弦函数及相关函数的定义域

【例3】求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

(2) $y = \sqrt{\log_2 \frac{1}{\sin x} - 1}$.

规律方法

解三角不等式 $\sin x > a (|a| < 1)$ 常用的方法有两种.

方法1: 三角函数的图像法.

(1) 作出直线 $y=a, y=\sin x$ 的图像;

(2) 确定 $\sin x=a$ 的 x 值;

(3) 选取一个合适区间写出 $\sin x > a$ 的解集, 要尽量使解集为一个连续区间.

方法2: 三角函数线法.

(1) 找出使 $\sin x=a$ 的两个 x 值的终边所在位置.

(2) 根据变化趋势, 确定不等式的解集.

跟踪演练 3

求函数 $y = \sqrt{2\sin x + 1}$ 的定义域.



DANGTANG JIANCE

1. 下列函数不是正弦函数的有 _____ (填写编号).

① $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$; ② $y = 2\sin x$; ③ $y = |\sin x|$;

④ $y = \sin x + 1$.

2. 函数 $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}$ 的值域为 _____.

3. $y = \sqrt{\sin x}$ 的定义域为 _____.

4. 用五点法画 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像时, 下列哪个点不是关键点 ()

A. $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, 1)$ C. $(\pi, 0)$ D. $(2\pi, 0)$

5. 在 $[0, 2\pi]$ 上用五点法作出 $y = -\sin x - 1$ 的简图.

学习目标

1. 掌握函数周期性及最小正周期的定义, 会判断、应用简单函数的周期性;
2. 掌握正弦函数的周期性和最小正周期;
3. 会求 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期, 理解它与 $y = \sin x$ 的周期之间的关系.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 绘制正弦曲线时, 可以利用单位圆上的 _____; 所以角的终边每旋转一周后, 角的正弦值就会出现 _____ 的现象.

2. 诱导公式 $\sin(2\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

预习导学

1. 对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个 _____ T , 使得当 x 取其定义域 D 中的 _____ 时, 有 $x + T \in D$, 且 _____, 那么函数 $y = f(x)$ 就叫做周期函数, T 叫做函数 $y = f(x)$ 的 _____.
2. 如果在周期函数 $y = f(x)$ 的所有周期中存在一个 _____, 那么这个 _____ 就叫做 $y = f(x)$ 的最小正周期.
3. 正弦函数的最小正周期为 _____.

[问题] 试找出至少一个周期函数, 不存在最小正周期.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 求正弦(型)函数的周期

【例 1】求下列函数的周期.

$$(1) y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(2) y = |\sin 2x|.$$

规律方法

1. 利用周期函数的定义求三角函数的周期, 关键是抓住变量“ x ”增加到“ $x + T$ ”时函数值重复出现, 则可得 T 是函数的一个周期.

2. 常见三角函数周期的求法: (1) 对于形如函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $\omega \neq 0$ 的周期求法通常用公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 来求解. (2) 对于形如 $y = |A\sin \omega x|$, $\omega \neq 0$ 的周期情况常结合图像法来解决.

跟踪演练 1

求函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + 3\right)$ 的周期.

要点二 抽象函数的周期

【例 2】(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2) = f(x)$, 求 $f(x)$ 的周期;

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2) = -f(x)$, 求 $f(x)$ 的周期;

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) + f(x+1) + f(x) = 0$, 求 $f(x)$ 的周期.

规律方法

1. 判断函数的周期性只需证明 $f(x+T)=f(x)$ ($T \neq 0$) 便可证明函数是周期函数, 且周期为 T . 周期只需非零即可, 可以是负数, 但一般的情况下周期取正值.

2. 一般的, 设非零正常数 a , 若 $f(x+a)=-f(x)$, 则周期为 $2a$;

若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则周期为 $2a$;

若 $f(x+a)=\frac{-1}{f(x)}$, 则周期为 $2a$.

跟踪演练 2

若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=\frac{1}{f(x)}$, 求 $f(x)$ 的周期.

要点三 周期性的应用

【例 3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(x+2)$, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x)=2^x + \log_2 x$, 则 $f(2021)=$ _____.

规律方法

利用周期性, 将自变量的值向已知解析式的自变量取值范围转化.

跟踪演练 3

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 满足 $f(x+1)=-f(x-1)$, 若 $f(1) < -1$, $f(5)=a^2-2a-4$, 则实数 a 的取值范围是_____.

要点四 函数的奇偶性、单调性与周期性的综合应用

【例 4】定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$. 若 $f(2) > 1$, $f(7)=a$, 求实数 a 的取值范围.

规律方法

(1) 周期性与奇偶性的综合. 此类问题多考查求值问题, 常利用奇偶性及周期性进行变换, 将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

(2) 单调性、奇偶性与周期性的综合. 解决此类问题通常先利用周期性转化自变量所在的区间, 然后利用奇偶性和单调性求解.

跟踪演练 4

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+1)=-f(x)$, 若 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上严格减, 则 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是 ()

- A. 增函数 B. 减函数
C. 先增后减的函数 D. 先减后增的函数



当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小正周期是_____.
2. 函数 $f(x)=\sin(\pi x-1)$ 的最小正周期是_____.
3. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $\omega=$ _____.
4. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(x+2)=-f(x)$ 且 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上是严格增函数, 则 $f(x)$ 的周期为_____ ; $f(2)=$ _____.
5. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2)=-f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)=x$.
 - (1) 求 $f(\pi)$ 的值;
 - (2) 当 $-4 \leq x \leq 4$ 时, 求 $f(x)$ 的图像与 x 轴所围成的图形的面积.

学习目标

1. 理解和掌握正弦函数的最值与值域.
2. 掌握正弦函数的图像特征, 求简单的指定定义域下的值域与最值.
3. 能正确应用三角恒等式化简函数解析式, 求较为复杂的正弦型函数的值域.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 函数的最值: 设函数 $f(x), x \in D$.
若任取 $x \in D$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 _____, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x), x \in D$ 的最大值;
若任取 $x \in D$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 _____, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x), x \in D$ 的最小值.
2. 连续函数 $f(x), x \in D$, 若最小值为 m , 最大值为 n , 则函数的值域为 _____.
3. 正弦函数的解析式为 _____; 定义域为 _____; 最小正周期为 _____.

预习导学

1. 正弦函数 $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的最大值为 _____, 此时 $x =$ _____;
正弦函数 $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.
2. 正弦函数 $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的值域为 _____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 简单的复合函数最值

【例1】(1) 求函数 $y = 3 - 2\sin x$ 的最大值与最小值并确定取得最大值、最小值时的自变量 x 的集合;

(2) 求函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值与最小值并确定取得最大值、最小值时的自变量 x 的集合.

规律方法

1. 形如 $y = a\sin x + b$ 的函数的最值或值域问题, 可将 $\sin x$ 视为整体, 结合 a 的正负 (即 $at + b$ 的单调性), 并利用正弦函数的有界性 ($-1 \leq \sin x \leq 1$) 求解.

2. 形如 $y = \sin f(x)$ 的函数的最值或值域问题, 可将 $f(x)$ 视为整体, 先得到 $f(x)$ 的范围, 再利用正弦曲线求出 y 的相关结论.

跟踪演练 1

求函数 $f(x) = |\sin x|$ 的最大值与最小值.

要点二 正、余弦函数的值域与最值

【例2】(1) 求函数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 的值域;

(2) 求函数 $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - 1}$ 的值域;

(3) 已知函数 $f(x) = 2a\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + a + b$ 的定义域为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 值域是 $[-5, 1]$, 求 a, b 的值.

规律方法

三角函数的最值问题是三角函数基础知识的综合应用,它往往与二次函数、三角函数图像、函数的单调性等知识联系在一起,有一定的综合性.在求解时,一要注意三角函数式的变形方向,二要注意正弦函数本身的有界性,还要注意灵活选用方法.

(1) 求解形如 $y = a\sin^2 x + b\sin x + c, x \in D$ 的函数的值域或最值时,通过换元,令 $t = \sin x$,将原函数转化为关于 t 的二次函数,利用配方法求值域或最值即可.求解过程中要注意 $t = \sin x$ 的有界性.

(2) 形如 $y = \frac{a\sin x + c}{b\sin x + d}$ 型的函数,解决此类函数的最值问题主要是利用正弦函数的有界性以及复合函数的有关性质.这类问题通常是用配方法求最值,但要注意分类讨论.

跟踪演练 2

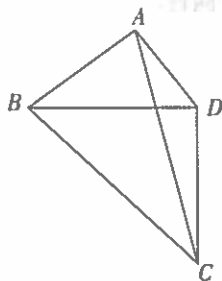
求函数 $y = 2\sin^2 x + 5\sin x - 1$ 的最大值和最小值.

要点三 在实际情境中的应用

【例 3】为了美化环境,某公园欲将一块空地规划建成休闲草坪,休闲草坪的形状为如图所示的四边形 $ABCD$. 其中 $AB = 3$ 百米, $AD = \sqrt{5}$ 百米,且 $\triangle BCD$ 是以 D 为直角顶点的等腰直角三角形. 拟修建两条小路 AC , BD (路的宽度忽略不计), 设 $\angle BAD = \theta, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(1) 当 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时,求小路 AC 的长度;

(2) 当草坪 $ABCD$ 的面积最大时,求此时小路 BD 的长度.

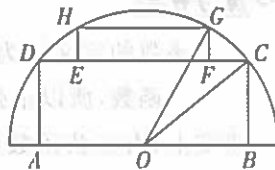


规律方法

在求解三角函数相关的应用题时,往往会经过以下几个环节:(1)选定适当的角度作为参数;(2)结合正弦定理、余弦定理和面积公式建立函数关系;(3)通过三角恒等式,例如两角和与差、二倍角以及辅助角公式等求出函数的最值或值域.

跟踪演练 3

如图,有一块半圆形的空地,政府计划在空地上建一个矩形的市民活动广场 $ABCD$ 及矩形的停车场 $EFGH$, 剩余的地方进行绿化. 其中半圆的圆心为 O , 半径为 r , 矩形的一边 AB 在直径上, 点 C, D, G, H 在圆周上, E, F 在边 CD 上, 且 $\angle BOG = 60^\circ$, 设 $\angle BOC = \theta$. 记市民活动广场及停车场的占地总面积为 $f(\theta)$, 求 $f(\theta)$ 的表达式;



课堂检测 DANGTANG JIANCE

- 已知函数 $f(x) = \sin x - 2|\sin x|, x \in [0, 2\pi]$, 则函数的最小值为_____, 最大值为_____.
- 函数 $y = \sin^2 x + \sin x - 1$ 的值域为_____.
- 对于函数 $f(x) = a\sin(\pi - x) + bx + c$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是 ()
A. 4 和 6 B. 3 和 1 C. 2 和 4 D. 1 和 2
- 设函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $[m, n]$, 值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 令 $t = n - m$, 则 t 的最大值与最小值的和为 ()
A. 2π B. $\frac{3\pi}{2}$ C. π D. $\frac{2\pi}{3}$

学习目标

1. 掌握正弦函数 $y = \sin x$ 的奇偶性与单调性.
2. 会求正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间.
3. 能够应用函数的奇偶性与单调性解决简单的等式或不等式问题.

温故知新

知识链接

1. 正弦函数的最小正周期为 _____.
2. 正弦函数的最大值为 _____, 此时 $x =$ _____;
最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.

预习导学

1. 正弦函数的定义域为 _____; 正弦函数是 _____ 函数, 所以正弦曲线关于 _____ 对称.
事实上, 由正弦函数的周期性可知, 正弦曲线还关于 _____ 对称.
2. 正弦函数的严格增区间为 _____;
严格减区间为 _____.

课堂讲义

要点一 正弦(型)函数奇偶性的判断

【例1】判断下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = -\sin x + 1$;
- (2) $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right)$.

规律方法

判断函数奇偶性时, 必须先检验定义域是否关于原点对称. 可以通过否定必要条件来说明函数为非奇非偶函数. 但要说明函数是奇(偶)函数, 则必须验证相应的定义.

跟踪演练①

判断下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = \sqrt{2}\sin 2x$;

$$(2) f(x) = \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{3\pi}{2}\right).$$

要点二 与正弦相关的复合函数奇偶性的判断

【例2】判断下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$;
- (2) $f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$.

规律方法

在求解三角不等式, 例如: $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 时, 建议充分利用正弦曲线, 在曲线上标识出满足不等式的区域, 即可得到定义域是否关于原点对称的初步判断. 在与其他函数复合时, 需要结合该函数的相关知识(例如对数的运算性质), 属于要求较高的综合性题目.

跟踪演练②

判断函数 $f(x) = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{1 - \sin x}$ 的奇偶性.

要点三 求正弦(型)函数的单调区间

【例3】(1)求函数 $y = -\sin x$ 的严格增区间;

(2)求函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 的严格增区间.

规律方法

求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 单调区间的方法:(1)要把 $\omega x + \varphi$ 看作一个整体,若 $\omega < 0$,先用诱导公式将式子变形,将 x 的系数化为正;(2)在 $A > 0, \omega > 0$ 时,将“ $\omega x + \varphi$ ”代入正弦函数的单调区间,可以解得与之单调性一致的单调区间;(3)当 $A < 0, \omega > 0$ 时同样方法可以求得与正弦函数单调性相反的单调区间.

跟踪演练③

1. 函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right), x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的严格减区间是_____.

2. 求函数 $y = \log_2 \sin x$ 的严格增区间.

要点四 正弦函数的单调性的应用

【例4】利用正弦(型)函数的单调性,比较下列各组数的大小:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

(2) $\sin 196^\circ$ 与 $\cos 156^\circ$.

规律方法

用正弦函数的单调性比较大小时,应先将异名化同名,把不在同一单调区间内的角用诱导公式转化到同一单调区间,再利用单调性来比较大小.

跟踪演练④

比较下列各组数的大小:

(1) $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$ 与 $\sin\left(\frac{49}{3}\pi\right)$;

(2) $\cos 870^\circ$ 与 $\sin 980^\circ$.

当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的最小正周期是_____.

2. 下列不等式中成立的是_____. (填写编号)

① $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ ② $\sin 3 > \sin 2$

③ $\sin \frac{7}{5}\pi > \sin\left(-\frac{2}{5}\pi\right)$ ④ $\sin 2 > \cos 1$

3. 下列函数是偶函数的是_____. (填写编号)

① $y = x^2$ ② $y = \sin x$ ③ $y = |\sin x|$

4. 函数 $y = \sin 2x, x \in [0, \pi]$ 的严格增区间为_____.

5. 求函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的严格减区间.

7.2 余弦函数的图像与性质

学习目标

1. 理解和掌握余弦函数的概念.
2. 掌握余弦曲线与正弦曲线的关系.
3. 掌握余弦函数的基本性质, 能应用这些基本性质求解相关问题.

温故知新

知识链接

1. 正弦函数的定义是什么?

2. 诱导公式 $\cos x = \sin(\quad)$.

预习导学

1. 余弦函数的定义: _____.
2. 余弦曲线可以由正弦曲线向左平移 _____ 后得到.
3. 余弦函数的基本性质:

函数	$y = \cos x$
图像	
定义域	$\mathbf{R}$
值域	
奇偶性	
周期性	最小正周期: _____
单调性	在 _____ 上严格递增; 在 _____ 上严格递减
最值	在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y_{\max} = 1$; 在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y_{\min} = -1$

「问题」如何熟记余弦函数的性质?

课堂讲义

重点一 较为复杂的函数的值域与最值

【例 1】(1) 求函数 $y = \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ 的最大值;

(2) 求函数 $y = 1 - 2\cos^2 x + 5\sin x$ 的最大值和最小值;

(3) 求函数 $y = \frac{3 - \cos x}{2 - \cos x}$ 的值域.

规律方法

(1) 形如 $y = \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ 类型的式子, 可以设 $t = \sin x + \cos x$, 将原函数转化为关于 t 的二次函数.

(2) $y = \frac{a \cos x + c}{b \cos x + d}$ 型的函数, 解决此类函数的最值问题主要是利用余弦函数的有界性以及复合函数的有关性质. 这类问题通常是用配方法求最值, 但要注意分类讨论.

(3) $y = a \cos^2 x + b \cos x + c, x \in D$ 的函数的值域或最值时, 通过换元, 令 $t = \cos x$, 将原函数转化为关于 t 的二次函数, 利用配方法求值域或最值即可. 求解过程中要注意 $t = \cos x$ 的有界性.

跟踪演练①

(1) 求函数 $y = \cos^2 2x - 3\cos 2x + 1$ 的最大值和最小值;

(2) 求函数 $y = \frac{\sqrt{5}\sin x + 1}{\cos x + 2}$ 的值域.

要点二 余弦函数奇偶性与周期性

【例 2】(1) 函数 $y = |\cos x| - 1$ 的最小正周期是 _____;

(2) 函数 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega x\right)$ 的最小正周期为 4π , 则 $\omega =$ _____.

(3) 判断下列函数的奇偶性, 并求它们的周期.

① $y = 3\cos 2x, x \in \mathbf{R}$;

② $y = \cos\left(\frac{3}{4}x + \frac{3\pi}{2}\right), x \in \mathbf{R}$.

规律方法

余弦(型)函数的奇偶性与周期性的研究方法, 可参考正弦(型)函数的相关性质研究, 可以将正弦函数的方法类比到余弦函数.

跟踪演练②

(1) 判断函数 $f(x) = \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x - 1}$ 的奇偶性;

(2) 求函数 $y = \cos \frac{1}{2}x$ 的周期.

要点三 余弦函数单调性与最值

【例 3】(1) 求函数 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 的严格增区间;

(2) 求函数 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$ 的最大值与最小值.

规律方法

求函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 单调区间的方法, 与正弦型一样, 要把 $\omega x + \varphi$ 看作一个整体, 在 $A > 0, \omega > 0$ 时, 将“ $\omega x + \varphi$ ”代入余弦函数的单调区间, 可以解得与之单调性一致的单调区间; 当 $\omega < 0$ 时, 可先利用余弦函数的偶函数性质将 ω 化为正数. 在 $\omega > 0$ 的前提下, 当 $A < 0$, 只需求出与余弦函数单调性相反的单调区间即可.

跟踪演练 3

求函数 $y = \log_+ \cos x$ 的严格增区间.

要点四 正弦曲线与余弦曲线的对称性

【例 4】(1) 求证: 正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 的图像关于 $(k\pi, 0), k \in \mathbf{Z}$ 中心对称;

(2) 求证: 余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$ 的图像关于 $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 轴对称.

规律方法

正弦函数是奇函数又是周期函数, 两个性质相结合, 则可知正弦函数有无数多个对称中心. 同理, 余弦函数是偶函数又是周期函数, 两个性质相结合, 则可知余弦函数有无数多个对称中心. 作为证明题, 需要逻辑验证图像中心对称与轴对称的定义.

(1) 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 中心对称的充要条件是: $f(2a - x) + f(x) = 0$;

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 轴对称的充要条件是: $f(2a - x) = f(x)$.

正弦曲线与余弦曲线的性质, 还可以通过两者的平移关系进行相互转化.

跟踪演练 4

(1) 写出正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 的图像的对称轴;

(2) 写出余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$ 的图像的对称中心.



当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 函数 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$ 的值域是 _____.

2. 函数 $y = \cos 2x, x \in [0, \pi]$ 的严格增区间为 _____.

3. 比较 $\cos \frac{17}{8}\pi$ 与 $\cos \frac{37}{9}\pi$ 的大小.

4. 求函数 $y = \cos 2x, x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 的值域.

7.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像

学习目标

1. 掌握 $y=A\sin x$ 、 $y=\sin\omega x$ 、 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像,理解它们与 $y=\sin x$ 的图像之间的关系.
2. 会用五点法作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的大致图像.



温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 在正弦函数 $y=\sin x, x\in[0, 2\pi]$ 的图像上,起关键作用的“五点”为_____.
2. 在余弦函数 $y=\cos x, x\in[0, 2\pi]$ 的图像上,起关键作用的“五点”为_____.
3. 当 $a>0$ 时,将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴方向向_____平移 a 个单位长度,得到函数 $y=f(x+a)$ 的图像;将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴方向向_____平移 a 个单位长度,得到函数 $y=f(x-a)$ 的图像,简记为“_____”.

预习导学

1. $A(A>0)$ 对 $y=A\sin x$ 的图像的影响

函数 $y=A\sin x$ 的图像,可以看作是把 $y=\sin x$ 图像上所有点的纵坐标:当 $A>1$ 时伸长或当 $0<A<1$ 时缩短到原来的 A 倍,横坐标不变而得到,函数 $y=A\sin x$ 的值域为_____,最大值为_____,最小值为_____.

「问题 1」如何理解 A 对 $y=A\sin x$ 的图像的影响?

2. $\omega(\omega>0)$ 对 $y=\sin\omega x$ 的图像的影响

函数 $y=\sin\omega x$ 的图像,可以看作是把 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标:当 $\omega>1$ 时,_____或当 $0<\omega<1$ 时,_____到原来的_____倍,纵坐标不变而得到.

「问题 2」如何理解 ω 对 $y=\sin\omega x$ 的图像的影响?

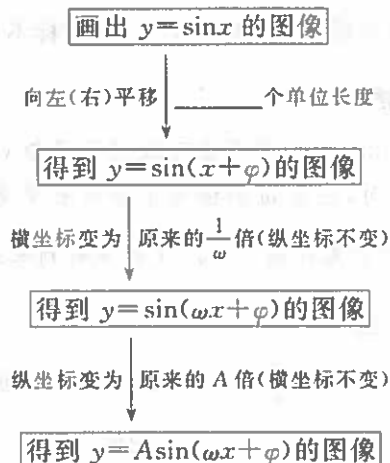
3. φ 对 $y=\sin(x+\varphi), x\in\mathbb{R}$ 的图像的影响

$y=\sin(x+\varphi)$ ($\varphi\neq 0$) 的图像可以看作是把正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有的点:当 $\varphi>0$ 时,向_____或当 $\varphi<0$ 时,向_____平行移动_____个单位长度而得到.

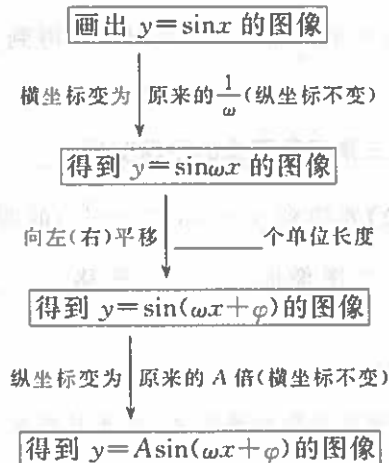
「问题 3」如何理解 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像的影响?

4. 由 $y=\sin x$ 的图像变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$) 的图像的流程:

方法 1:



方法 2:



「问题4」上面的两种三角函数的图像变换的流程有什么不同?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 A, ω 对 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的影响

【例1】(1)函数 $y = \cos x$ 图像上各点的纵坐标不变,把横坐标变为原来的2倍,得到图像的解析式为 $y = \cos \omega x$,则 ω 的值为_____.

(2)为了得到函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像,只需把函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像 ()

- A. 横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变
- B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变
- C. 纵坐标伸长到原来的2倍,横坐标不变
- D. 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,横坐标不变

规律方法

$y = \sin(x + \varphi)$ 的图像变换得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像时,注意 ω 的值与图像的长度变化成反比,当 $\omega > 1$ 时缩短或当 $0 < \omega < 1$ 时伸长到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍.

跟踪演练 1

(1) $y = \frac{1}{3}\cos \frac{x}{4}$ 的图像纵坐标伸长到原来的3倍,横坐标不变,得到_____的图像.

(2)将函数 $y = \sin x$ 的图像上所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$ 倍,纵坐标不变,得到_____的图像.

要点二 三角函数图像的平移变换

【例2】要得到 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像,只要将 $y = \sin 2x$ 的图像向_____平移_____个单位长度.

规律方法

已知两个函数的解析式,判断其图像间的平移关系的步骤:

(1)将两个函数解析式化简成 $y = A\sin \omega x$ 与 $y =$

$A\sin(\omega x + \varphi)$,即 A, ω 及名称相同的结构;

(2)找到 $\omega x \rightarrow \omega x + \varphi$,变量 x “加”或“减”的量,即平移的单位长度为 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$;

(3)明确平移的方向.

跟踪演练 2

要得到函数 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,只要将 $y = \sin 3x$ 的图像向_____平移_____个单位长度.

要点三 三角函数图像的综合变换

【例3】函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 的图像是由函数 $y = \sin x$ 的图像通过怎样的变换得到的?

规律方法

在三角函数的图像变换中,先伸缩后平移变换的平移量为 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度,先平移后伸缩变换的平移量为 $|\varphi|$ 个单位长度,两者不一样,应特别注意.

跟踪演练 3

把函数 $y = f(x)$ 的图像上各点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把横坐标伸长到原来的2倍,再把纵坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$ 倍,所得图像的解析式是 $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$,求 $f(x)$ 的解析式.

【例 4】用“五点法”作出函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的简图,并指出该函数的单调区间.

规律方法

“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像的步骤:

(1)定点:如下表所示.

x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	A	0	$-A$	0

(2)作图:在坐标系中描出这五个关键点,用平滑的曲线顺次连接,得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期内的图像.

(3)扩展:将所得图像按周期向两侧扩展可得 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

跟踪演练 4

作出 $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 一个周期上的图像.

- 为了得到 $y=\cos\frac{x}{4}$ 的图像,只需把 $y=\cos x$ 的图像上的所有点的纵坐标不变,横坐标_____.
- 要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移_____个单位长度.
- 将函数 $y=\sin x$ 的图像上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),所得图像的函数解析式是_____.
- 函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的三个“零点”的横坐标可能是 ()
 A. $-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$ B. $-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$
 C. $-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- 已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, 该函数的图像如何由 $y=\sin x (x \in \mathbf{R})$ 的图像经过变换得到?



7.4 正切函数的图像与性质

学习目标

1. 理解正切函数的概念.
2. 掌握正切函数的图像特征.
3. 掌握正切函数的性质.

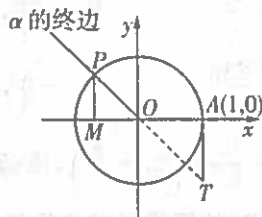


温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 如图所示, 角 α 的终边与单位圆交于点 P , 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 过点 A 作单位圆的切线 AT 交 OP 的反向延长线于点 T , 则有 $\tan \alpha =$ _____.



2. 由诱导公式 _____, 知正切函数是周期函数, 其最小正周期是 _____.
3. 由诱导公式 _____, 知正切函数是 _____ (填“奇”或“偶”) 函数.

预习导学

1. 正切函数的图像与性质

	$y = \tan x$
图像	
定义域	$\{x x \in \mathbb{R}, \text{且 } _, k \in \mathbb{Z}\}$
值域	$\mathbb{R}$
周期	最小正周期为 _____
奇偶性	_____
单调性	在区间 _____ ($k \in \mathbb{Z}$) 内单调递增
对称中心	_____ ($k \in \mathbb{Z}$)

「问题」正切函数是单调函数吗?



课堂讲义

KETANG JIANGYI

要点一 正切函数的定义域与值域

【例 1】(1) 求函数 $y = \sqrt{3 \tan x - \sqrt{3}}$ 的定义域;

(2) 求函数 $y = \tan^2 x - 2 \tan x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 的值域.



规律方法

1. 求定义域时, 要注意正切函数自身的限制条件, 另外解不等式时要充分利用三角函数的图像.

2. 求正切函数的值域, 注意换元法的应用, 将原函数转化为二次函数的值域或不等式问题求解.

跟踪演练 1

(1) 求函数 $y = \sqrt{\tan x + 1} + \lg(1 - \tan x)$ 的定义域;

(2) 求函数 $y = \frac{\tan^2 x - \tan x + 1}{\tan^2 x + \tan x + 1}$ 的最大值, 最小值, 并求函数取得最大值或最小值时自变量 x 的集合.

【例 2】(1) 求函数 $y = -\tan\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调减区间；

(2) 比较 $\tan \frac{6}{5}\pi$ 与 $\tan\left(-\frac{13}{7}\pi\right)$ 的大小.

规律方法

1. 求函数 $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 为常数) 的单调区间问题, 可先由诱导公式把 x 的系数化为正值, 再由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 求出 x 的范围即可.

2. 比较正切值大小的步骤: 用诱导公式将角化到同一单调区间内, 再用单调性比较大小关系.

跟踪演练 2

(1) 求函数 $y = 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ 的单调区间;

(2) 比较 $\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{12}{5}\pi\right)$ 的大小.

【例 3】求下列函数的周期.

(1) $y = 2 \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $y = 3 \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.

规律方法

1. 利用周期函数的定义求三角函数的周期, 关键是抓住变量“ x ”增加到“ $x+T$ ”时函数值重复出现, 则可得 T 是函数的一个周期.

2. 形如 $y = A \tan(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ 的函数可利用周期公式 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ 求解.

跟踪演练 3

求下列函数的最小正周期.

(1) $y = \tan\left(-\frac{1}{2}x\right)$;

(2) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$.

【例4】设函数 $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域、周期、单调区间;
- (2) 求不等式 $-1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ 的解集;
- (3) 作出函数 $y = f(x)$ 在一个周期内的简图.

1. 函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 .

2. 下列各式中正确的是 .

- ① $\tan 735^\circ > \tan 800^\circ$ ② $\tan 1 > -\tan 2$
 ③ $\tan \frac{5\pi}{7} < \tan \frac{4\pi}{7}$ ④ $\tan \frac{9\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{7}$

3. 下列关于函数 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的说法正确的是 .

- ① 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上为严格增函数
 ② 最小正周期是 π
 ③ 图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 成轴对称

4. $f(x) = \tan(x + \pi)$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数
 C. 既是奇函数又是偶函数 D. 非奇非偶函数

5. 求函数 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域, 并指出它的单调区间.

规律方法

对于形如 $y = \tan(\omega x + \varphi)$ (ω, φ 为非零常数) 的函数性质和图像的研究, 应以正切函数的性质与图像为基础, 运用整体思想和换元法求解. 如果 $\omega < 0$, 一般先利用诱导公式将 x 的系数化为正数, 再进行求解.

跟踪演练 4

画出函数 $y = |\tan x|$ 的图像, 并根据图像判断其单调区间、奇偶性、周期性.

网络知识构建 WANGLUO ZHISHIGOUJIAN

三角函数	正弦函数	五点法: $(0,0), (\frac{\pi}{2},1), (\pi,0), (\frac{3\pi}{2},-1), (2\pi,0)$ 性质: - 定义域: $\mathbf{R}$; 奇函数; 周期: 2π; 值域: $[-1,1]$ - 对称轴: $x=k\pi+\frac{\pi}{2} (k\in\mathbf{Z})$; 对称中心: $(k\pi,0) (k\in\mathbf{Z})$ - 增区间: $[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}] (k\in\mathbf{Z})$; 减区间: $[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}] (k\in\mathbf{Z})$
	余弦函数	五点法: $(0,1), (\frac{\pi}{2},0), (\pi,-1), (\frac{3\pi}{2},0), (2\pi,1)$ 性质: - 定义域: $\mathbf{R}$; 偶函数; 周期: 2π; 值域: $[-1,1]$ - 对称轴: $x=k\pi (k\in\mathbf{Z})$; 对称中心: $(k\pi+\frac{\pi}{2},0) (k\in\mathbf{Z})$ - 增区间: $[2k\pi-\pi, 2k\pi] (k\in\mathbf{Z})$; 减区间: $[2k\pi, 2k\pi+\pi] (k\in\mathbf{Z})$
	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$)	参数意义: A : 振幅; 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$; 频率 $f=\frac{\omega}{2\pi}$; 圆频率 $\omega=2\pi f$; 相位 $\omega x+\varphi$; 初始相位: φ 值域: $[-A, A]$
	正切函数	定义域: $\{x x\in\mathbf{R}, \text{且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$; 值域: $\mathbf{R}$; 奇函数; 周期: π 对称中心: $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k\in\mathbf{Z})$ 增区间: $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}) (k\in\mathbf{Z})$

要点归纳 YAODIAN GUINA

一、三角函数的定义域

掌握任意角的正弦、余弦、正切,能够利用三角函数图像求三角函数的定义域,注意三角函数的周期性,防止丢解.

【例1】求函数 $f(x)=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{\tan x-1}$ 的定义域.

跟踪演练 1

设 $f(x)=\sqrt{1-2\sin x}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 求 $f(x)$ 的值域及取最大值时 x 的值.

二、三角函数的图像及变换

1. 用“五点法”作 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像时, 确定五个关键点的方法是分别令 $\omega x + \varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

2. 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图像变换, 应注意先“平移”后“伸缩”与先“伸缩”后“平移”的区别.

3. 由已知函数图像求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的解析式时, 常用的解题方法是待定系数法, 由图中的最大值或最小值确定 A , 由周期确定 ω , 由适合解析式的点的坐标来确定 φ , 但由图像求得的 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的解析式一般不是唯一的, 只有限定 φ 的取值范围, 才能得出唯一的解, 否则 φ 的值不确定, 解析式也就不唯一.

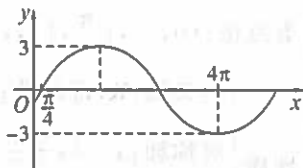
【例 2】 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\pi < \varphi < 0$), $y = f(x)$ 图像的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ ;

(2) 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的图像.

跟踪演练 2

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一段图像如图所示.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 把 $f(x)$ 的图像向左至少平移多少个单位长度, 才能使得到的图像对应的函数为偶函数?

三、三角函数的性质

三角函数的性质,重点应掌握 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 的定义域、值域、单调性、奇偶性、对称性等有关性质,在此基础上掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的相关性质. 在研究其相关性质时,将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体,利用整体代换思想解题是常见的技巧.

【例 3】已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+a$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$ 的严格减区间;

(3)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 -2 ,求 a 的值.

跟踪演练 3

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

四、三角函数与三角变换的综合问题

利用三角公式和基本的三角恒等变换可以化简三角函数的解析式,进而才能顺利地探求三角函数的有关性质.这类问题解决的关键在于熟练地运用基本的三角恒等变换思想方法,对其解析式变形、化简,尽量使其化为只有一个角为自变量的三角函数.在进行恒等变换时,既要注意三角恒等思想(切割化弦、常值代换、降幂与升幂、收缩代换、和差与积的互化,角的代换)的运用;还要注意一般的数学思想方法(如换元法等)的运用.

【例 4】已知函数 $f(x) = 2\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{4} + \sqrt{3}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值;

(2)令 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,判断函数 $g(x)$ 的奇偶性,并说明理由.

跟踪演练 ④

已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域;

(2)若 $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$,求 $\sin 2\alpha$ 的值.



名教联盟

