



上海重点高中标准题 · 咻咻一顿刷

高中数学 第6章

慕课 & 思度

校稿 UyNehc



第6章 三角

6.1 正弦、余弦、正切、余切

第1课时 锐角的正弦、余弦、正切、余切

学习目标

1. 掌握锐角的正弦、余弦、正切、余切的定义.
2. 会求锐角的正弦、余弦、正切、余切.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 初中我们已经学习过角,那么初中对角的定义是什么呢?

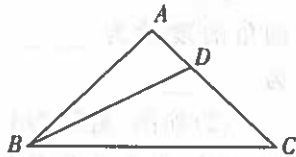
所谓角就是_____.

2. 角按大小进行分类,可分为锐角、钝角和直角.锐角的范围是_____,钝角的范围是_____,直角的度数是_____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 锐角正弦、余弦、正切、余切的定义

【例1】(1)如图,等腰直角三角形ABC中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$,D为AC上一点, $AD = \frac{1}{3}AC$, $\angle DBC = \alpha$,则 $\tan \alpha =$ _____.



(2)若三角形三边的比为25:24:7,则最小角的正弦值为_____,余弦值为_____.

规律方法

1. 求锐角的正弦、余弦、正切、余切时,通常将角放置在一个直角三角形中.

2. 只需知道直角三角形的边之比(未必要知道边长),即可求出角的三角值.

跟踪演练 1

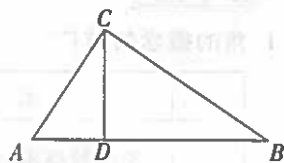
在Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$,若 $c : a = 3 : 5$,则 $\cot B =$ _____.

要点二 特殊角的正弦、余弦、正切、余切值

【例2】(1)若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$,且 $\left| \sin^2 \theta - \frac{1}{4} \right| + \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$,则 $\tan \theta =$ _____;

(2)如图,已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp$

AB 于D, $CD=1$,若AD、BD的长是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根,且 $\tan A - \tan B = 2$,求此二次方程.



规律方法

1. 常用的锐角有 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$,这些角也被称为锐角范围内的特殊角,它们的正弦、余弦、正切和余切值是需要熟记的.

2. 一个锐角的正(余)弦值等于其余角的余(正)弦值;一个锐角的正(余)切值等于其余角的余(正)切值.

跟踪演练 2

已知 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A$ 与 $\angle B$ 满足 $(1 - \tan A)^2 + \left| \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 0$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 若 α 为锐角, $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,则 α 等于_____.
2. 在Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,若 $a = 5\sqrt{5}$, $b = 5\sqrt{15}$,则 $\angle B =$ _____.
3. 化简 $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ - \tan 50^\circ \cdot \cot 50^\circ =$ _____.
4. 若 β 是锐角,那么 $\sqrt{\cos^2 \beta - 2\cos \beta + 1} =$ _____.
5. 在Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,若将各边长度都扩大为原来的2倍,则 $\angle A$ 的余切值 ()
A. 扩大2倍 B. 缩小2倍
C. 扩大4倍 D. 不变

第2课时 任意角及其度量(1)

学习目标

1. 会从运动的观点理解角的形成过程,并能推广到任意角.
2. 理解任意角中正角和负角是具有相反意义的量,它们的正负是为了区分其旋转方向而规定的.
3. 理解任意角、象限角、终边重合的角等概念,能准确判断角的终边在平面直角坐标系中的位置.

温故知新

预习导学

1. 角的概念的推广

	定义	图示
正角	一条射线绕端点按_____方向旋转所形成的角	
负角	一条射线绕端点按_____方向旋转所形成的角	
零角	一条射线_____形成的角	

「问题1」高中与初中角的定义有何不同?

2. 象限角

把角置于平面直角坐标系中,使得角的_____与坐标原点重合,角的_____与 x 轴的正半轴重合,此时角的_____在第几象限,就说这个角是第几象限的角,或者说这个角属于第几象限.

「问题2」如果角的终边落在坐标轴上,还是象限角吗?

3. 终边重合的角

所有与角 α 的终边重合的角(包括角 α 本身)的集合表示为 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha (k \in \mathbb{Z})\}$,即任一与角 α 终边重合的角,都可以表示成角 α 与_____的和.

「问题3」终边重合的角的表达式有哪些含义?

用集合表示各个象限内的角如下表:

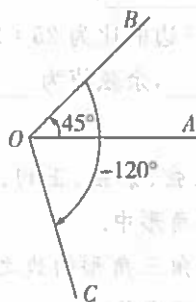
第一象限的角	$\{\alpha k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第二象限的角	$\{\alpha k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第三象限的角	$\{\alpha k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第四象限的角	$\{\alpha k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

课堂讲义

要点一 任意角的概念

【例1】(1)时钟走了3小时20分,则时针所转过的角的度数为_____,分针所转过的角的度数为_____.

(2)如图,射线 OA 绕顶点 O 逆时针旋转 45° 到 OB 位置,并在此基础上顺时针旋转 120° 到达 OC 位置,则 $\angle AOC =$ _____.

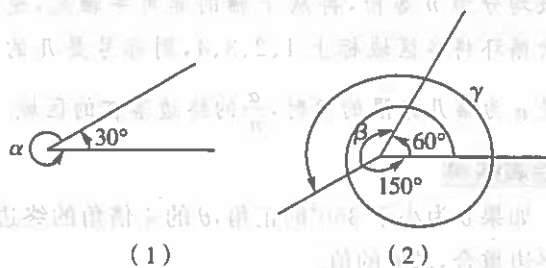


规律方法

1. 确定任意角的大小要明确其旋转方向和转量.
2. 零角的始边和终边重合,但始边和终边重合的角不一定是零角,如周角等.
3. 角的范围由 $0^\circ \sim 360^\circ$ 推广到任意角后,角的加减运算类似于实数的加减运算.
4. 画图表示角时,应注意箭头的方向不可丢掉,箭头方向代表角的正负.

跟踪演练①

写出图(1)、(2)中的角 α 、 β 、 γ 的度数.



要点二 象限角的判定

【例2】已知角 $\alpha = 2\ 017^\circ$.

(1)把 α 改写成 $k \cdot 360^\circ + \beta$ ($k \in \mathbb{Z}$, $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$) 的形式,并指出它是第几象限的角;

(2)求 θ ,使 θ 与 α 终边重合,且 $-360^\circ \leq \theta < 720^\circ$.

跟踪演练②

在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,找出与下列各角终边重合的角,并判别它们是第几象限的角.

(1) -150° ;

(2) 650° ;

(3) $-950^\circ 15'$.

要点三 角的集合的表示

【例3】已知集合 $A = \{\alpha | k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{\beta | k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 求 $A \cap B$.

规律方法

1. 把任意角化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) 的形式,关键是确定 k : 可以用观察法 (α 的绝对值较小时),也可用除法.

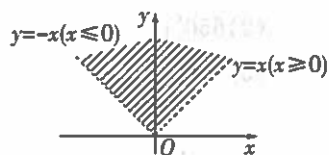
2. 要求适合某种条件且与已知角终边重合的角,其方法是先求出与已知角终边重合的角的一般形式,再依条件构建不等式组求出 k 的值.

规律方法

要表示某范围内的角,应先在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内确定区域角起止边界处角,再把端点处加上 360° 的整数倍即得.

跟踪演练③

如图,若角 α 的终边落在函数 $y=x(x\geq 0)$ 与 $y=-x(x\leq 0)$ 的图像所夹的区域(即图中阴影部分,不包括边界)内,求角 α 的集合.



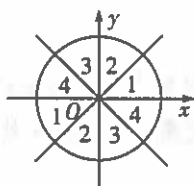
要点四 任意角的综合应用

【例4】若 α 是第二象限的角,试确定 2α 、 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限的角.

规律方法

已知 α 为某象限的角,要能快速确定 $\frac{\alpha}{n}$ ($n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}^*$)所在的象限.

(1) $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的问题:作出各个象限的角平分线,它们与坐标轴把周角等分成8个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这8个区域依次循环标上号码1、2、3、4,则标号是几的两个区域,就是 α 为第几象限的角时, $\frac{\alpha}{2}$ 终边落在的区域,此时 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出,如下图所示.



(2) $\frac{\alpha}{n}$ 所在象限的问题:类比(1)中的作法,把各象限均分为 n 等份,再从 x 轴的非负半轴起,逆时针依次循环将各区域标上1、2、3、4,则标号是几的区域就是 α 为第几象限的角时, $\frac{\alpha}{n}$ 的终边落在的区域.

跟踪演练④

如果 θ 为小于 360° 的正角, θ 的4倍角的终边与 θ 的终边重合,求 θ 的值.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. -215° 是第_____象限的角.
2. 若 α 是第三象限的角,则 $-\alpha$ 是第_____象限的角.
3. 给出下列四个命题:① -75° 角是第四象限的角;② 225° 角是第三象限的角;③ 475° 角是第二象限的角;④ -315° 是第一象限的角.其中真命题有_____个.
4. 下列命题中,正确的是 ()
 A. 第一象限角必是锐角
 B. 终边重合的角必相等
 C. 相等角的终边位置必重合
 D. 不相等的角其终边位置必不重合
5. 分别写出角的终边在 x 轴正半轴、 x 轴负半轴、 y 轴正半轴、 y 轴负半轴、 y 轴、 x 轴、坐标轴上角的集合.

第③课时 任意角及其度量(2)

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 手表慢了5分钟,如何校准?手表快了1.5小时,又如何校准?

2. 初中几何研究过角的度量,当时是用(角)度来作单位度量角的.那么 1° 的角是如何定义的?它的大小与它所在圆的大小是否有关?

3. 角度制下,计算扇形弧长和面积的公式是什么?

4. 795° 角是 ()
 A. 第一象限的角 B. 第二象限的角
 C. 第三象限的角 D. 第四象限的角

预习导学

1. 弧度制

(1) 弧度制的定义

弧长等于_____的弧所对的圆心角叫做1弧度的角,用符号_____表示,读作弧度.用“_____”作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

(2) 任意角的弧度数与实数的对应关系

正角的弧度数是一个_____;负角的弧度数是一个_____;零角的弧度数是_____.

(3) 角的弧度数的计算

如果一个半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长为 l ,那么角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

「问题1」角度制与弧度制的关系是什么?

2. 角度与弧度互化公式

$180^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 弧度	π 弧度 $= \underline{\hspace{2cm}}$
$1^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ (弧度) $\approx 0.017\ 45$ (弧度)	1 弧度 $= \frac{180^\circ}{\pi}$ $\approx \underline{\hspace{2cm}}$

3. 一些特殊角与弧度数的对应关系

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	_____
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____

「问题2」角度与弧度的互化,应注意什么?

4. 扇形的弧长及面积公式

设扇形的半径为 R ,弧长为 l ,圆心角为 α ($0 < \alpha < 2\pi$),则

度量单位类别	α 为弧度制
扇形的弧长	$l = \underline{\hspace{2cm}}$
扇形的面积	$S = \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$

「问题3」弧度制下的弧长及面积公式有什么特点?

要点一 角度制与弧度制的互化

【例 1】设 $\alpha_1 = -570^\circ$, $\alpha_2 = 750^\circ$, $\beta_1 = \frac{3\pi}{5}$, $\beta_2 =$

$-\frac{\pi}{3}$.

(1) 将 α_1, α_2 用弧度制表示出来, 并指出它们各自是哪个象限的角;

(2) 将 β_1, β_2 用角度制表示出来, 并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出与它们终边重合的所有角.

规律 方法

1. 进行角度与弧度换算时, 要抓住关系: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

2. 也可用计算器进行角度制与弧度制的换算, 但在使用计算器时, 要注意观察计算器上的按键并阅读相关使用说明书, 从而完成计算器角度与弧度的转化.

跟踪演练 1

把下列各角化成 $2k\pi + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 并指出各角分别是第几象限的角:

(1) -1500° ;

(2) $\frac{23\pi}{6}$;

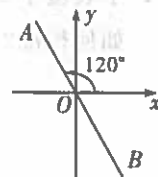
(3) -4 .

要点二 弧度制表示角的集合

【例 2】如图, 用弧度制分别写出下列条件下的角的集合.

(1) 终边在射线 OA 上;

(2) 终边在直线 AB 上.

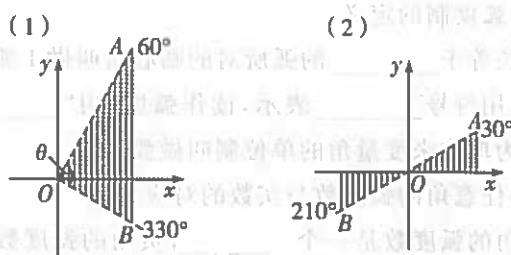


规律 方法

用弧度制表示与 α 终边重合的角 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, 其中 $2k\pi$ 是 π 的偶数倍, 而不是整数倍, 还要注意角度制与弧度制不能混用.

跟踪演练 2

用弧度制表示顶点在原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边落在阴影部分的角的集合 (不包括边界), 如图所示.

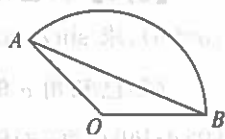


要点三 扇形的弧长及面积公式的应用

【例3】如图,已知扇形AOB的圆心角为 120° ,半径长为6,求

(1) $\widehat{AB}$ 的长;

(2)扇形所含弓形的面积.



规律方法

与角度制下的弧长和扇形的面积公式比较,显然弧度制下的弧长和扇形面积公式更简练,但需注意角一定是用弧度表示的.联系半径、弧长和圆心角的有两个公式:一是 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$,二是 $l = |\alpha|r$,如果已知其中两个,就可以求出另一个.

跟踪演练③

已知扇形周长为5,面积为1,求扇形圆心角的弧度数.

【例4】已知扇形的周长为20 cm,当它的半径和圆心角各取什么值时,才能使扇形的面积最大?最大面积是多少?

规律方法

当扇形周长一定时,其面积有最大值,最大值的求法是把面积 S 转化为 r 的函数.

跟踪演练④

已知扇形AOB的周长为10 cm.

(1)若这个扇形的面积为 4 cm^2 ,求扇形圆心角的弧度数;

(2)求该扇形的面积取得最大值时圆心角的大小及弧长.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

- 2 弧度的角所在的象限是第_____象限.
- 将 1920° 转化为弧度数为_____.
- 角 α 的集合为 $A = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,则集合 $A \cap [-4\pi, 2\pi] =$ _____.
- 下列换算结果错误的是 ()
 - 60° 换算成弧度是 $\frac{\pi}{3}$
 - $-\frac{10}{3}\pi$ 换算成角度是 -600°
 - -150° 换算成弧度是 $-\frac{7}{6}\pi$
 - $\frac{\pi}{12}$ 换算成角度是 15°
- 若扇形的面积是 1 cm^2 ,它的周长是4 cm,求扇形圆心角的弧度数.

第4课时 任意角的正弦、余弦、正切、余切(1)

学习目标

1. 理解任意角的正弦、余弦、正切和余切的定义,熟悉各象限角三角比值的符号.
2. 借助单位圆理解任意角的三角比(正弦、余弦、正切)与圆上点的坐标之间的关系.
3. 理解终边重合角的三角比的值相等的含义.

温故知新 WENGU ZHIXIN

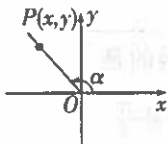
知识链接

1. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,设锐角 A 对边为 a , B 对边为 b , C 对边为 c ,
 $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$.
2. 已知角 $\alpha = 3$, 则角 α 的终边在第 二 象限.
3. 用弧度制表示终边在第二象限的角的集合为 $\{\alpha \mid \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

预习导学

任意角的正弦、余弦、正切、余切的定义:

如图,在角 α 的终边上任取一点 P , 设 P 的坐标为 (x, y) , $|OP| = r$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2} (r > 0)$,



我们规定:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \quad (\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}).$$

「问题」角的终边上的点的位置变化时,三角比值变化吗?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 定义法求三角比

【例1】(1) 已知角 α 的终边经过点 $P(-4a, 3a)$ ($a \neq 0$), 求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sec \alpha, \csc \alpha, \cot \alpha$ 的值;

(2) 已知角 α 的终边在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sec \alpha, \csc \alpha, \cot \alpha$ 的值.

规律方法

(1) 在解决角的终边在某条直线上的相关问题时, 应注意到角的终边为射线, 所以应分两种情况处理, 取射线上异于原点的任意一点 (a, b) , 则对应角的正弦值为 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\tan \alpha = \frac{b}{a}$. (2) 必要的时候, 也定义正弦值的倒数为余割, 余

弦值得倒数为正割, 即 $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

跟踪演练 1

已知角 α 的终边在直线 $y = 2x$ 上, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sec \alpha, \csc \alpha, \cot \alpha$ 的值.

要点二 判断三角比的符号

【例 2】判断下列各式的符号:

- (1) $\sin 340^\circ \cdot \cos 265^\circ$;
- (2) $\sin 4 \cdot \tan\left(-\frac{23}{4}\pi\right)$;
- (3) $\frac{\sin(\cos \theta)}{\cos(\sin \theta)}$ (θ 为第二象限的角).

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 如果角 α 的终边过点 $P(2\sin 30^\circ, -2\cos 30^\circ)$, 则 $\cos \alpha =$ _____.
2. 已知角 α 的终边上有一点 $P(x, -2)$, 且 $|OP| = 4$, 则 $\cot \alpha, \csc \alpha$ 的值为 _____.
3. 若 $A(1, a)$ 是角 θ 终边上的一点, 且 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 则实数 a 的值为 _____.
4. 已知 α, β 都是第一象限的角, 则“ $\alpha = \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 _____.
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件
5. 已知角 α 的终边过点 $P(5, a)$, 且 $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$, 求 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值.

规律方法

1. 能准确判定角的终边位置是判断该角的三角比值符号的关键.

2. 要熟记三角比值在各象限的符号规律: “一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦”.

跟踪演练 ②

- (1) 已知 θ 为象限角且 $\cot(\sin \theta) > 0$, 则 θ 是第 _____ 象限的角.
- (2) 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是 _____.

第5课时 任意角的正弦、余弦、正切、余切(2)

学习目标

1. 掌握同角三角关系式的导出过程, 知道这些关系式成立的条件.
2. 理解和掌握同角三角的三个关系, 并能用这些关系式转化同角的各三角比值.

温故知新

知识链接

1. 在角 α 的终边上任取一点 P , 设 P 的坐标为 (x, y) , $|OP| = r$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($r > 0$), 写出六个三角比的定义.

2. 有下列命题: ①终边重合的角的同名三角比的值相等; ②终边不重合的角的同名三角比的值不相等; ③若 $\sin \alpha > 0$, 则 α 是第一象限或第二象限的角; ④若 α 是第二象限的角, 且 $P(x, y)$ 是其终边上一点, 则 $\cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 其中正确的命题是 _____.

预习导学

1. 同角三角比的关系

倒数关系: $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$, $\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$, $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

商数关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$), $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$).

平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$.

2. 同角三角比关系式的变形

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的变形公式: $\sin^2 \alpha =$ _____, $\cos^2 \alpha =$ _____;

(2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 的变形公式: $\sin \alpha =$ _____,

$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$.

「问题」同角三角比的关系式在角和函数名上有什么特点?

课堂讲义

要点一 由角的某一三角比值求其余三角比值

【例1】(1) 已知 $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, 求 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的值;

(2) 已知 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 且 α 是第三象限的角, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值.

规律方法

已知角 α 的某一三角比的值, 求角 α 的其余三角比的值时, 要注意公式的合理选择, 一般是先选用平方关系, 再用商数关系. 另外也要注意“1”的代换, 如“ $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ”. 本题(1)没有指出 α 是第几象限的角, 则必须由 $\cos \alpha$ 的值推断出 α 所在的象限, 再分类求解.

跟踪演练①

若 $2\sin\theta + 3\cos\theta = 2$, 求 $\sin\theta + \cos\theta$ 的值.

跟踪演练②

化简: $\frac{1}{\cos^2\alpha \sqrt{1+\tan^2\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ (α 为第二象限的角).

考点二 同角三角比的化简问题

【例2】化简:

- (1) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \cdot \sqrt{\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\tan\theta+\sin\theta}}$ (其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$);
- (2) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ (其中 $\sin\alpha \cdot \tan\alpha < 0$).

规律方法

解答这类题目的关键在于公式的灵活运用, 切实分析好同角三角比间的关系, 化简过程中常用的方法有: (1) 化切为弦, 即把非正、余弦的比都化为正、余弦比, 从而减少比名称, 达到化简的目的. (2) 对于含有根号的, 常把根号下化成完全平方式, 然后去根号达到化简的目的. (3) 对于化简含高次的三角比式, 往往借助于因式分解, 或构造 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 以降低比次数, 达到化简的目的.

当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 已知 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\sin^2\alpha =$ _____.
2. 已知 α 是第四象限的角, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, 则 $\sin\alpha =$ _____.
3. 已知 $\sin\theta = \frac{m-3}{m+5}$, $\cos\theta = \frac{4-2m}{m+5}$, 其中 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 则 $\cot\theta =$ _____.
4. 已知 $\tan\alpha = m$, 则 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$ _____.
5. 如果 α 是第二象限的角, 下列各式中成立的是 ()

- A. $\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ B. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
 C. $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ D. $\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

第6课时 任意角的正弦、余弦、正切、余切(3)

学习目标

1. 能利用同角三角比的三个关系, 解决相关的求值、化简和证明问题.
2. 掌握弦切互化的技巧, 掌握 $\sin \alpha \pm \cos \alpha$ 、 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的关系.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 设角 α ,

- (1) 角 α 的正弦和余弦所满足的平方关系为: _____;
- (2) 角 α 的正切和余切所满足的倒数关系为: _____;
- (3) 角 α 的弦与切所满足的商数关系为: _____.

2. 定义: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$,

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

称 $\sec \alpha$ 为角 α 的正割, $\csc \alpha$ 为角 α 的余割.

预习导学

平方关系的变式:

- (1) $1 + \tan^2 \alpha =$ _____;
- (2) $1 + \cot^2 \alpha =$ _____.

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 正、余弦化正切问题

【例1】已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 求下列各式的值:

- (1) $\sin \alpha + 2\cos \alpha$;
- (2) $\frac{\cos \alpha - 5\sin \alpha}{3\cos \alpha + \sin \alpha}$;
- (3) $\frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 3\cos^2 \alpha}{5\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + 1}$;
- (4) $2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

规律方法

分子、分母都是 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 的同次 (k 次) 表达式的值时, 通常用分子、分母同时除以 $\cos^k \alpha$ 化切求解; 分母是 1 的用 $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ 替换.

跟踪演练

已知 $\tan \alpha = 3$, 求下列各式的值:

- (1) $\frac{\sin \alpha + 3\cos \alpha}{2\sin \alpha + 5\cos \alpha}$;
- (2) $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 3\cos^2 \alpha$.

要点二 $\sin \alpha \pm \cos \alpha$ 、 $\sin \alpha \cos \alpha$ 之间的转化

【例2】(1) 若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ($0 < \theta < \pi$), 求 $\tan \theta$ 的值.

(2) 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$, 求 $\tan \alpha + \cot \alpha$ 的值.

规律方法

1. $\sin \alpha + \cos \alpha$, $\sin \alpha - \cos \alpha$, $\sin \alpha \cos \alpha$ 三个式子中, 已知其中一个, 可求其他两个, 即“知一求二”, 它们之间的关系是: $(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2\sin \alpha \cos \alpha$.

2. 根据 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的正负, 可以缩小角的范围.

跟踪演练②

已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 是方程 $4x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 的两个根, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, 求角 θ 的值.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\sec \alpha =$ _____.
2. 若 $\sin \alpha \tan \alpha < 0$, 且 $\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha} < 0$, 则角 α 是第 _____ 象限角.
3. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha} =$ _____.
4. 已知 $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} = -2\tan \alpha$, 则角 α 的集合为 _____.
5. 已知 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$, 求 $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

要点三 综合应用

【例3】若 θ 是第二象限角, 且 $\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 是第 _____ 象限角.

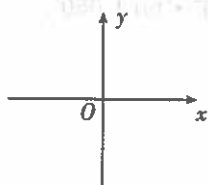
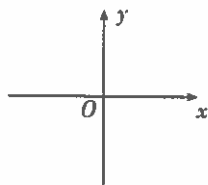
规律方法

利用平方关系后, 再开方来求 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 或 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值时, 要注意正负符号的选取.

跟踪演练③

分别在所示的各坐标系中画出满足条件的角 α 终边所在区域: (用阴影表示)

- (1) $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$; (2) $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.



学习目标

1. 掌握 $2k\pi + \alpha$ 、 $-\alpha$ 、 $\pi \pm \alpha$ 与角 α 终边位置关系的几何特征(对应关系),并借助单位圆与有关线段推导相应的诱导公式.

2. 掌握运用诱导公式进行简单三角式求值、化简与恒等式证明的方法.

温故知新

知识链接

1. 三角比诱导公式一是什么?

2. 诱导公式一的作用是什么?

3. 设 α 为任意角,则 $\pi + \alpha$ 、 $-\alpha$ 、 $\pi - \alpha$ 的终边与 α 的终边之间有什么对称关系?

预习导学

诱导公式二、三、四

公式二	$\sin(-\alpha)$ = _____	$\cos(-\alpha)$ = _____	$\tan(-\alpha)$ = _____	$\cot(-\alpha)$ = _____
公式三	$\sin(\pi + \alpha)$ = _____	$\cos(\pi + \alpha)$ = _____	$\tan(\pi + \alpha)$ = _____	$\cot(\pi + \alpha)$ = _____
公式四	$\sin(\pi - \alpha)$ = _____	$\cos(\pi - \alpha)$ = _____	$\tan(\pi - \alpha)$ = _____	$\cot(\pi - \alpha)$ = _____

「问题」如何快速记忆诱导公式二、三、四?

课堂讲义

KETANG JIANGYI

要点一 利用诱导公式求值

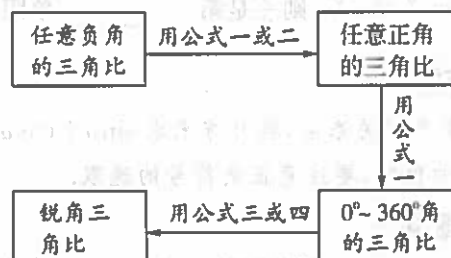
【例1】计算:(1) $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$;

(2) $7\cos 270^\circ + 3\sin 270^\circ + \tan 765^\circ$;

(3) $\cos(-120^\circ)\sin(-150^\circ) + \tan 855^\circ$.

规律方法

利用诱导公式求任意角三角比的步骤:(1)“负化正”——用公式一或二来转化;(2)“大化小”——用公式一将角化为 0° 到 360° 间的角;(3)“小化锐”——用公式三或四将大于 90° 的角转化为锐角;(4)“锐求值”——化到锐角的三角比后求值,如图:



跟踪演练①

计算: $\sin 690^\circ \cdot \sin 150^\circ + \cos 930^\circ \cdot \cos(-870^\circ) + \tan 120^\circ \cdot \tan 1050^\circ$.

要点二 利用诱导公式化简

【例 2】化简下列各式:

$$(1) \frac{\sin(540^\circ + \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\tan(\alpha - 180^\circ)};$$

$$(2) \frac{\cos(\theta + 4\pi) \cdot \cos^2(\theta + \pi) \cdot \sin^2(\theta + 3\pi)}{\sin(\theta - 4\pi) \sin(5\pi + \theta) \cos^2(-\pi + \theta)}.$$

规律方法

三角函数式的化简方法:(1)利用诱导公式,将 $-\alpha, \pi \pm \alpha$ 的三角比转化为 α 的三角比;(2)注意“切化弦”法的应用.(3)注意“1”的变式应用:如 $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

跟踪演练 2

已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 且 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$,则 $\frac{\cot(-\alpha - \pi) \cdot \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(-\alpha) \cdot \tan \alpha}$ 的值为_____.

要点三 诱导公式一~四综合应用问题

【例 3】(1)已知 $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < 2\pi$,求 $\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \pi)$ 的值;

(2)已知 $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$,求 $\tan\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$ 的值;

(3)在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin(2\pi - A) = -\sqrt{2} \sin(\pi - B)$, $\sqrt{3} \cos A = -\sqrt{2} \cos(\pi - B)$,求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

规律方法

本题考查了诱导公式与同角三角比公式的综合应用,注意公式的准确记忆,以及三角比符号的判定.

跟踪演练 3

已知 $\sin(3\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$,求

$$\frac{\sin(180^\circ + \alpha) \cos(720^\circ + \alpha) \tan(540^\circ + \alpha) \cdot \sin(-180^\circ + \alpha)}{\tan(900^\circ + \alpha) \cdot \sin(-180^\circ - \alpha) \cdot \cos(-180^\circ - \alpha)}$$

的值.

要点四 证明问题

【例 4】证明恒等式: $\frac{1 + \sec \alpha + \tan \alpha}{1 + \sec \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

规律方法

关于三角恒等式的证明,常用方法:

(1)从一边开始,证得它等于另一边,一般由繁到简;

(2)左右归一法,即证明左右两边都等于同一个式子.

无论用哪种方法都要针对题设与结论间的差异,有针对性地变形,以消除其差异.

跟踪演练④

证明恒等式: $\left(\frac{\sin \theta + \tan \theta}{\csc \theta + \cot \theta}\right)^2 = \frac{\sin^2 \theta + \tan^2 \theta}{\csc^2 \theta + \cot^2 \theta}$.

4. 求下列各三角比:

(1) $\sin 1320^\circ$; (2) $\cos\left(-\frac{67\pi}{6}\right)$;

(3) $\sin^2 150^\circ + \sin^2 135^\circ + 2\sin 210^\circ + \cos^2 225^\circ$.

5. 是否存在角 α 和 β , 当 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in (0, \pi)$ 时,

等式 $\sin(3\pi - \alpha) = \sqrt{2} \sin \beta$, $\sqrt{3} \cos(-\alpha) = -\sqrt{2} \cos(\pi + \beta)$ 同时成立? 若存在, 则求出 α 和 β 的值; 若不存在, 请说明理由.

课堂检测 DANGTANG JIANCE

1. $\sin 690^\circ =$ _____.

2. 对于诱导公式中的角 α , 下列说法正确的是 ()

- A. α 一定是锐角
- B. $0 \leq \alpha < 2\pi$
- C. α 一定是正角
- D. α 是使公式有意义的任意角

3. 下列各式不正确的是 ()

- A. $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$
- B. $\cos(-\alpha + \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$
- C. $\sin(-\alpha - 360^\circ) = -\sin \alpha$
- D. $\cos(-\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$

学习目标

1. 掌握 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ 与角 α 终边位置关系的几何特征(对应关系), 并借助单位圆的有关线段以及前四组诱导公式推导其余四组诱导公式.

2. 掌握并能运用诱导公式进行简单三角式求值、化简与恒等式证明的方法.

温故知新

知识链接

第1~4组诱导公式是什么?

公式一	$\sin(2k\pi + \alpha)$ = _____	$\cos(2k\pi + \alpha)$ = _____	$\tan(2k\pi + \alpha)$ = _____	$\cot(2k\pi + \alpha)$ = _____
公式二	$\sin(-\alpha)$ = _____	$\cos(-\alpha)$ = _____	$\tan(-\alpha)$ = _____	$\cot(-\alpha)$ = _____
公式三	$\sin(\pi + \alpha)$ = _____	$\cos(\pi + \alpha)$ = _____	$\tan(\pi + \alpha)$ = _____	$\cot(\pi + \alpha)$ = _____
公式四	$\sin(\pi - \alpha)$ = _____	$\cos(\pi - \alpha)$ = _____	$\tan(\pi - \alpha)$ = _____	$\cot(\pi - \alpha)$ = _____

预习导学

诱导公式五、六、七、八

公式五	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____
公式六	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____
公式七	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ = _____
公式八	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ = _____

课堂讲义

要点一 八组诱导公式的综合运用

【例1】已知角 α 为第四象限角, 且 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$,

则 $\frac{\sin(\pi - \alpha) + 2\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}$ 的值为 _____.

规律方法

八组诱导公式往往综合使用, 需要充分认识和理解前四组与后四组诱导公式的不同: (1) 前四组等号两边三角名相同, 特殊角为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍. (2) 后四组等号两边三角名不同, 特殊角为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍.

跟踪演练1

已知 $\sin(\pi - \alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \beta\right)$, $\sqrt{3}\cos(-\alpha) = -\sqrt{2}\cos(\pi + \beta)$, 且 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, 求 α 和 β 的值.

要点二 与三角形内角的综合

【例2】设 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 求证:

(1) $\sin(A+B) = \sin C$;

(2) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$.

规律方法

1. 充分注意三角形内角和为 180° 的隐含条件;

2. 注意到三角形内角的取值范围 $(0, \pi)$. 若该角的余弦值为正, 则该角为锐角; 若该角的余弦值为负, 则该角为钝角; 若该角的余弦值为零, 则该角为直角.

跟踪演练 2

在 $\triangle ABC$ 中, ① $\sin(A+B) + \sin C$; ② $\cos(B+C) + \cos A$; ③ $\tan \frac{A+B}{2} \tan \frac{C}{2}$; ④ $\cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{A}{2}$. 其中恒为定值的是 . (填写编号)

要点三 两角和、差构成特殊角

【例 3】(1) 若 $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) =$.

(2) 求值: $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$.

规律方法

1. 将条件中的角作为整体, 观察所求角与该整体间的和或差的关系;

2. 多个角在同一个代数式中时, 注意将角按照某一规律(例如两角和为 90° 等)分类.

跟踪演练 3

若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{13}$, 且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right)$ 的值.

当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 已知 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\cos \alpha =$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 均为锐角, 且 $\cos A > \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 .

3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan \varphi$ 等于

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

4. 若 α 为任意角, 则满足 $\cos\left(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha$ 的一个 k 值为

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

5. 化简求值:

(1) $\cos 540^\circ + \tan 225^\circ - \cos(-330^\circ) + \sin(-210^\circ)$;

(2) $\frac{\sqrt{1-2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}}{\sin 160^\circ - \sqrt{1-\sin^2 20^\circ}}$.

第9课时 已知正弦、余弦或正切值求角

学习目标

能写出 $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\tan x = \tan a$ 的解集(其中角 a 已知).

温故知新 WENGU ZHIXIN

预习导学

1. 以_____为未知数的方程叫做三角方程, 满足三角方程的所有的_____叫做三角方程的解集.

2. 简单三角方程的解集

		解集
$\sin x = \sin a$ ($a \in [0, 2\pi)$)	$a = \frac{\pi}{2}$	$\{x x = \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
	$a = \frac{3\pi}{2}$	$\{x x = \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
	a	$\{x x = a, k \in \mathbb{Z}\}$
$\cos x = \cos a$ ($a \in [0, 2\pi)$)	$a = 0$	$\{x x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
	$a = \pi$	$\{x x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$
	$a (a \neq 0, \pi)$	$\{x x = 2k\pi \pm a, k \in \mathbb{Z}\}$
$\tan x = \tan a$ ($a \in [0, 2\pi)$)	$a (a \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	$\{x x = k\pi + a, k \in \mathbb{Z}\}$

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 已知正弦值求角

【例1】根据下列条件, 求角 x :

(1) $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$; (2) $\sin(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

规律方法

1. 正弦的最简三角方程, 可以有两种不同的解法. 在 $a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的情况下, 两种方法都是可以的;

2. 要熟悉特殊角的三角比值, 将它们(例如 $\frac{\sqrt{2}}{2}$)还原成某个角的正弦值(例如 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$);

3. 形如 $\sin f(x)$, 可将 $f(x)$ 视为一个整体, 套用最简三角方程的解法求得解集.

跟踪演练

求角 x 的解集 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{6}) = -1$.

要点二 已知余弦值求角

【例2】分别求满足下列条件的角 x 的集合:

(1) $2\cos 3x + 1 = 0$;

(2) $\cos 3x = \cos 2x$.

规律方法

这种类型的问题的求解公式如下:

$\sin x = \sin y$ 的解集为 $\{x | x = 2k\pi + y \text{ 或 } 2k\pi + \pi - y, k \in \mathbb{Z}\}$;

$\cos x = \cos y$ 的解集为 $\{x | x = 2k\pi + y \text{ 或 } 2k\pi - y, k \in \mathbb{Z}\}$;

$\tan x = \tan y$ 的解集为 $\{x | x = k\pi + y, k \in \mathbb{Z}\}$;

$\cot x = \cot y$ 的解集为 $\{x | x = k\pi + y, k \in \mathbb{Z}\}$.

跟踪演练 2

求满足条件的角 x 的集合: $\sin 5x = \cos 3x$.

规律方法

正切的最简三角方程相对简单,在合适的情况下将正弦、余弦的方程通过商数关系转成正切的方程.

跟踪演练 3

方程 $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ 在 $x \in [0, 4\pi]$ 中解的个数为 _____.

当堂检测

1. 关于 x 的方程 $\sin x = \frac{1}{m}$ 有解,则 m 的取值范围是 _____.

2. 方程 $\sin x = \frac{1}{3}, x \in [0, 4\pi]$ 的解个数为 _____ 个.

3. x 是第二象限角,且 $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$,则由 x 构成的集合为 _____.

4. 方程 $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ 的解集为 _____.

5. 已知 x 满足 $\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$,求 $\tan x + \cot x$ 的值.

要点三 已知正切值求角

【例 3】分别求满足下列条件的角 x 的集合:

(1) $\tan(1 - \pi x) = 1$;

(2) $\tan 9x + \tan 2x = 0$.

6.2 常用三角公式

第①课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(1)

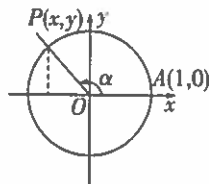
学习目标

1. 理解两角差的余弦公式的推导过程, 领会构造图形解决三角比问题的构造法思想.
2. 掌握并能灵活运用两角和与差的余弦公式解决三角式的求值、化简和证明问题.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 将时针拨慢一小时, 时针转过了_____弧度; 拨快两小时, 时针转过了_____弧度.
2. 如图, 角的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, $\sin \alpha =$ _____; $\cos \alpha =$ _____.



3. 平面上 $A(2, 1)$ 、 $B(3, 2)$ 两点的距离是_____.

预习导学

两角和与差的余弦公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

「问题」如何快速记忆两角和与差的余弦公式?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 给角求值问题

【例 1】求值: $\frac{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ}$.

规律方法

解含非特殊角的三角比的求值问题的一般思路是: (1) 把非特殊角转化为特殊角的和或差, 正用公式直接求值; (2) 在转化过程中, 充分利用诱导公式, 构造两角差的余弦公式的结构形式, 然后逆用公式求值.

跟踪演练 ①

求值:

(1) $\sin 460^\circ \cdot \sin(-160^\circ) + \cos 560^\circ \cdot \cos(-280^\circ)$;

(2) $\sin 285^\circ$.

要点二 给值求值问题

【例 2】已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 求 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ 的值.

规律方法

1. 变角的技巧, 如 $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$, $\alpha = \beta - (\beta - \alpha)$, $\alpha = (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)$ 等.

2. 利用差角的余弦公式求值时, 不能机械地从表面去套公式, 而要变通地从本质上使用公式, 即把所求的角分解成某两个角的差, 并且这两个角的正、余弦三角比的值是已知的或可求的, 再代入公式计算.

跟踪演练②

已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 其中 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$. 求 $\cos \beta$ 的值.

要点三 给值求角问题

【例3】已知 α, β 均为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta =$

$\frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\alpha - \beta$ 的值.

规律方法

这类问题的求解步骤: (1) 求出所求角的某种三角比的值, 三角比名的选择应当尽量使得角与比值具有一一对应的关系; (2) 根据三角比值, 结合角的范围, 确定角的大小.

跟踪演练③

已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求 β 的值.



当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. $\cos(-40^\circ)\cos 20^\circ - \sin(-40^\circ)\sin(-20^\circ) =$ _____.

2. $\cos 17^\circ =$ _____ ()

A. $\cos 20^\circ \cos 3^\circ - \sin 20^\circ \sin 3^\circ$

B. $\cos 20^\circ \cos 3^\circ + \sin 20^\circ \sin 3^\circ$

C. $\sin 20^\circ \sin 3^\circ - \cos 20^\circ \cos 3^\circ$

D. $\cos 20^\circ \sin 20^\circ + \sin 3^\circ \cos 3^\circ$

3. $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\cos \beta = \frac{3}{4}$, $\beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

4. 已知 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$ _____.

5. 将下列式子化为一个三角比:

(1) $\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha =$ _____;

(2) $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) =$ _____.

第②课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(2)

学习目标

1. 理解两角差的正弦、正切公式的推导过程.
2. 掌握并能灵活运用两角和与差的正弦、正切公式解决三角式的求值、化简和证明问题.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 两角差的余弦公式 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ _____, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ _____,
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$ _____, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$ _____.

预习导学

1. 两角和与差的正弦公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \text{_____};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \text{_____}.$$

2. 两角和与差的正切公式

$$(1) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

$$(2) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

「问题」如何快速记忆两角和与差的正弦、正切公式?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 给角求值问题

【例1】化简下列各式:

- (1) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \cos 74^\circ$;
- (2) $\frac{\sqrt{3} + \tan 15^\circ}{1 - \sqrt{3} \tan 15^\circ}$.

规律方法

解含非特殊角的三角式的求值问题:(1)把非特殊角转化为特殊角的和或差,正用公式直接求值;(2)在转化过程中,充分利用诱导公式,构造两角和或差的正弦、正切公式的结构形式,然后逆用公式求值.

跟踪演练①

化简下列各式:

- (1) $\sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 135^\circ \sin 165^\circ$;
- (2) $\frac{\cos 75^\circ - \sin 75^\circ}{\cos 75^\circ + \sin 75^\circ}$.

要点二 给值求值问题

【例2】(1)已知 $\frac{\pi}{4} < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, 那么 $\sin 2\alpha =$ _____;

(2)已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, 那么 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

规律方法

本题属于给值求值问题,求解时,关键是从已知角间的关系入手,分析出已知角和待求角的关系.常见角的变换为:

- (1) $2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$, $2\alpha - \beta = (\alpha - \beta) + \alpha$;
- (2) $\frac{\alpha + \beta}{2} = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$;
- (3) $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)$;
- (4) $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta)$.

跟踪演练 2

已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{33}{65}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, 求 $\sin \alpha$.

要点三 给值求角问题

【例 3】已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 且 α, β 为锐角, 求 $\alpha - \beta$ 的值.

规律方法

求角的大小, 要解决两个问题: (1) 确定所求角的范围; (2) 求角的某一三角比的值, 特别是要根据角的范围确定取该角的哪一种三角比. 求解该类问题常犯的错误是对角的范围讨论程度过大(小), 导致求出的角不合题意或者漏解.

跟踪演练 3

(1) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 且 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 试求角 α 的大小.

(2) 若 α, β 均为钝角, 且 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$, 求 $\alpha + \beta$.

要点四 化简证明问题

【例 4】化简: $\frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha - \beta)$.

规律方法

处理本类问题应注意分析角如何变化, 以及公式的正用、逆用和变形应用.

跟踪演练 4

已知 $3\sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$, 求证: $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan \alpha$.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

- $\frac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 75^\circ \tan 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若 $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 3$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\sin(\alpha - \beta)$.

第3课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(3)

学习目标

1. 掌握辅助角公式.
2. 能正用、逆用、变形应用两角和与差的正弦、余弦和正切公式.

温故知新

知识链接

两角和与差的正弦、余弦、正切公式

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

预习导学

1. 辅助角公式

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right),$$

$$\text{由于 } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 和 } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 满足 } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2$$

$$= 1, \text{ 所以令 } \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ 于是}$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta), \text{ 其中 } \beta \text{ (通常取}$$

$$0 \leq \beta < 2\pi) \text{ 由 } \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

确定.

2. 两角和的正切公式的变形

$$\tan \alpha + \tan \beta = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta \tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\tan \alpha \tan \beta = 1 - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)}.$$

3. 两角差的正切公式的变形

$$\tan \alpha - \tan \beta = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta \tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan(\alpha - \beta)} - 1.$$

课堂讲义

要点一 两角和与差的正弦、余弦和正切公式的逆用

【例1】求下列各式的值:

(1) 已知 $\alpha = 15^\circ$, 求 $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$ 的值.

(2) $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ \cdot \tan 30^\circ$.

规律方法

两角和与差的正切公式是变形较多的两个公式, 公式中有 $\tan \alpha \tan \beta, \tan \alpha + \tan \beta$ (或 $\tan \alpha - \tan \beta$), $\tan(\alpha + \beta)$ (或 $\tan(\alpha - \beta)$) 三者知二即可表示或求出第三个.

跟踪演练1

求下列各式的值:

(1) $\sin 62^\circ \cos 17^\circ - \cos 62^\circ \sin 17^\circ = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{12}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

要点二 两角和与差公式的变形应用

【例2】已知 $\triangle ABC$ 中, $\tan B + \tan C + \sqrt{3} \tan B \tan C = \sqrt{3}$, 且 $\sqrt{3} \tan A + \sqrt{3} \tan B = \tan A \tan B - 1$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

规律方法

三角形中的问题中注意使用隐含条件: $A + B + C = \pi$, 有时与诱导公式结合, 有时利用它寻找角之间的关系, 进而减少代数式中角的个数.

跟踪演练2

化简: $\tan \theta \tan 2\theta + \tan 2\theta \tan 3\theta + \tan 3\theta \tan 4\theta + \tan 4\theta \tan 5\theta$.

要点三 证明问题

【例3】(1) 求证: $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A, \tan B$ 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两个根, 求证: $C = 45^\circ$.

规律方法

1. 在化简、证明等问题中, 要充分考虑以什么角为单角(即作为一个整体处理的角), 以什么角为复角(即看作其他角的加减组合); 2. 在三角形有关的问题中, 要充分结合三角形内角的范围.

跟踪演练 3

已知 A, B, C 为锐角三角形 ABC 的内角.

求证: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

要点四 辅助角公式的应用

【例4】(1) 求值: $\frac{1}{1 + \sqrt{2} \sin 15^\circ + \sqrt{2} \cos 15^\circ}$;

(2) 已知 $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{4m-6}{4-m}$, 求 m 的取值范围.

规律方法

1. 化简求值问题应利用公式将非特殊角转化为特殊角, 注意处理问题的思路有多种时, 选择最简单的方法;

2. 化为同角的一种三角比的形式是三角问题化归的一个方向, 有助于解决取值范围问题和最值问题.

跟踪演练 4

求 $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值.

当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 已知 $A+B=45^\circ$, 则 $(1+\tan A)(1+\tan B) =$ _____.

2. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, 那么

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

3. 若 $\cos \alpha \cos \beta = 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

4. $\cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12}$ 的值为 _____ ()

A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{3}$

5. 已知 A, B 都是锐角, 且 $\tan A = \frac{1}{3}$, $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 $A+B$.

学习目标

1. 掌握二倍角的正弦、余弦和正切公式及其推导过程.
2. 能正确运用上述公式化简三角式, 求某些三角比的值和证明三角恒等式.
3. 熟悉二倍角公式的简单变形应用.



温故知新

WENGU ZHIXIN

知识链接

1. 化简 $\cos(x+y)\sin y - \sin(x+y)\cos y =$ _____.
2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{3}{5}$, 且 $\cos B = \frac{5}{13}$, 则 $\cos C =$ _____.
3. 设 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ _____.

预习导学

1. 二倍角公式

$$(1) \sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha;$$

$$(2) \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

「问题 1」两角和公式与二倍角公式有联系吗?

2. 倍角公式常用变形

$$(1) \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \text{降幂公式: } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$(4) \text{升幂公式: } 1 + \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2;$$

$$1 - \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2;$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

「问题 2」什么情况下 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha, \tan 2\alpha = 2 \tan \alpha$?



课堂讲义

KITANG JIANGYI

要点一 给角求值问题

【例 1】利用二倍角公式, 求下列各式的值:

$$(1) \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$(2) \frac{1}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{8};$$

$$(3) \frac{2 \tan 150^\circ}{1 - \tan^2 150^\circ}.$$

规律方法

对于给角求值问题, 一般有两类:

(1) 直接正用. 逆用二倍角公式, 结合诱导公式和同角三角比的基本关系对已知式进行转化, 一般可以化为特殊角.

(2) 若形式为几个非特殊角的三角式相乘, 则一般逆用二倍角的正弦公式, 在求解过程中, 需利用互余关系配凑出应用二倍角公式的条件, 使得问题出现可以连用二倍角的正弦公式的形式.

跟踪演练①

求下列各式的值:

(1) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$; (2) $1 - 2\sin^2 750^\circ$;

(3) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$; (4) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

2. 当遇到 $\frac{\pi}{4} \pm x$ 这样的角时可利用互余角的关系和诱导公式, 将条件与结论沟通.

跟踪演练②

已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 求 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

要点二 给值求值问题

【例 2】已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{5}{13}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$,

求 $\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$ 的值.

要点三 给值求角问题

【例 3】已知 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

规律方法

1. 条件求值问题常有两种解题途径: (1) 对题设条件变形, 把条件中的角、函数名向结论中的角、函数名靠拢; (2) 对结论变形, 将结论中的角、函数名向题设条件中的角、函数名靠拢, 以便将题设条件代入结论.

规律方法

在给值求角时, 一般选择一个适当的三角比, 根据题设确定所求角的范围, 然后再求出角. 其中确定角的范围是关键的一步.

跟踪演练③

已知 $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 且 α, β 为锐角, 求 $\alpha + 2\beta$ 的值.

要点四 化简问题

【例 4】化简下列各式:

(1) $\frac{1 + \cos 2\theta - \sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta - \sin 2\theta}$;

(2) $\sqrt{1 + \sin 10^\circ} - \sqrt{1 - \sin 10^\circ}$.

规律方法

对于三角式的化简有下面的要求: (1) 能求出值的应求出值; (2) 使三角比种类数尽量少; (3) 使三角式中的项数尽量少; (4) 尽量使分母不含有三角比; (5) 尽量使被开方数不含三角比.

跟踪演练④

化简下列各式:

(1) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{1 - \sin 2\alpha} =$ _____;

(2) α 为第三象限的角, 则 $\frac{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}{\cos \alpha} - \frac{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}}{\sin \alpha} =$ _____.

当场检测

DANGTANG JIANCE

1. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$ _____.

2. $\frac{\tan 7.5^\circ}{1 - \tan^2 7.5^\circ} =$ _____.

3. 设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是 _____.

4. $\cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos 75^\circ \cos 15^\circ$ 的值等于 _____.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

5. 求下列各式的值:

(1) $\tan 15^\circ + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$;

(2) $\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ$.

第5课时 三角变换的应用

学习目标

1. 掌握半角的正弦、余弦和正切公式及其推导过程.
2. 熟练掌握积化和差与和差化积公式.
3. 能用二倍角公式的逆用、和差化积与积化和差公式解决简单的求值、化简和证明问题.

温故知新

知识链接

1. 两角和与差的正弦、余弦公式:

2. 二倍角公式:

预习导学

1. 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 公式的变形

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}; \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

「问题」这组公式与倍角公式有何关系?

3. 积化和差公式:

$$\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}};$$

4. 和差化积公式:

$$\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}};$$

课堂讲义

重点一 应用半角公式求值

【例1】(1) 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}$;

(2) 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \frac{\alpha}{2}$,

$$\cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2};$$

(3) 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{求 } \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}.$$

规律方法

要求对半角公式要熟练, 同时要求对公式中的细节要落实, 注意结合角的范围, 判断半角正弦、余弦、正切的符号.

跟踪演练1

在平面直角坐标系 xOy 中, 以 x 轴为始边作锐角 α , 它的终边与单位圆相交于点 A , 且点 A 的横坐标为 $\frac{5}{13}$, 则 $\tan(\pi - \frac{\alpha}{2})$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

重点二 应用和差化积、积化和差公式求值化简

【例2】(1) 求 $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ$ 的值.

(2) 代数式 $2\sin \frac{x}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$ 能取到的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

规律方法

和差化积公式与积化和差公式是相互等价的, 都可以由两角和与差的正弦、余弦公式通过恒等变化得到. 在应用这两组公式化简、求值和证明时, 应当注意观察不同角之间是否存在和或差为定值(尤其是该定值为特殊角值时)的情况.

跟踪演练②

若 $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \sin 2y = \frac{2}{3}$,
则 $\sin(x+y) =$ _____.

要点三 二倍角与半角公式的综合应用

【例3】化简:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} \left[\frac{\sin 2x}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \right].$$

规律方法

半角的正切公式,往往选择两个有理式进行化简,即 $\tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$,不会有符号问题.用开方公式求值比较简便,两种公式用途稍有差异.

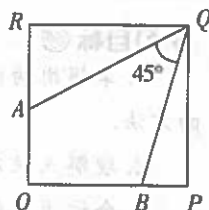
跟踪演练③

若 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, 化简

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta}} - \sqrt{1 - \sin \theta}.$$

要点四 参数角的选取

【例4】如图,正方形 $OPQR$ 的边长为 a ,点 A, B 在 OR, OP 边上,且 $\angle AQB = 45^\circ$,求四边形 $OBQA$ 面积的最大值.

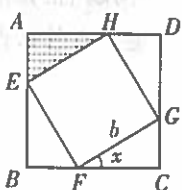


规律方法

以适当的角为参数,可以使得目标代数式的形式得以化简,方便之后进一步求取最值.

跟踪演练④

如图所示,有一块正方形的钢板 $ABCD$,其中一个角有部分损坏,现要把它截成一块正方形的钢板 $EF-GH$,其面积是原正方形钢板面积的三分之二,则应按角度 $x =$ _____ 来截.



当堂检测

DANGTANG JIANCE

1. 若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\sin \theta = \frac{3}{5}$, 则 $\cos \frac{\theta}{2} =$ _____.
2. 设 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$ _____.
3. $\cos 15^\circ \sin 105^\circ =$ _____.
4. 若 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$ _____.
5. 将 $\cos^2 x - \sin^2 y$ 化为积的形式, 结果是 ()
 A. $-\sin(x+y)\sin(x-y)$
 B. $\cos(x+y)\cos(x-y)$
 C. $\sin(x+y)\cos(x-y)$
 D. $-\cos(x+y)\sin(x-y)$

6.3 解三角形

第1课时 正弦定理

学习目标

1. 掌握用两边及夹角正弦表示三角形面积公式的方法.
2. 理解正弦定理及推导过程.
3. 会运用正弦定理解斜三角形.

温故知新

知识链接

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $A=30^\circ$, $C=90^\circ$, 斜边 $c=2$, 则 $B=$ _____, $a=$ _____, $b=$ _____.
2. 上题中 $\frac{a}{\sin A} =$ _____, $\frac{b}{\sin B} =$ _____, $\frac{c}{\sin C} =$ _____.

预习导学

1. 三角形面积公式

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 正弦定理

在三角形中, 各边与它所对角的正弦的比相等, 即

$$\frac{a}{\sin A} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

「问题」正弦定理何时成立? 它揭示了怎样的关系? 主要有什么作用?

课堂讲义

要点一 已知三角形的两角及一边解三角形

【例1】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=14$, $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, 求 a 及 $\triangle ABC$ 的面积.

规律方法

已知三角形任意两角和一边解三角形的基本思路: (1) 由三角形的内角和定理求出第三个角. (2) 由正弦定理公式求另外的两条边. 若已知角不是特殊角时, 往往先求出其正弦值 (这时应注意角的拆并, 即将非特殊角转化为特殊角的和或差, 如 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$), 再根据上述思路求解.

跟踪演练①

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c=10$, $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, 求 $\triangle ABC$ 的其他各边、各角.

要点二 已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形

【例2】在 $\triangle ABC$ 中, 解三角形:

(1) $b=4$, $c=8$, $B=30^\circ$;

(2) $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $A=30^\circ$;

(3) $a=5$, $b=2$, $B=120^\circ$;

(4) $b=3$, $c=3\sqrt{3}$, $B=30^\circ$.

规律方法

已知三角形两边和其中一边的对角解三角形时的方法:(1)首先由正弦定理求出另一边对角的正弦值;(2)如果已知的角为大边所对的角时,由三角形中大边对大角,大角对大边的法则能判断另一边所对的角为锐角,由正弦值求得锐角唯一;(3)如果已知的角为小边所对的角,则不能判断另一边所对的角为锐角,这时由正弦值可求两个角,要分类讨论.

跟踪演练②

已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $AC=1$,且 $B=30^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

要点三 正弦定理的应用

【例3】在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$,判断 $\triangle ABC$ 的形状.

规律方法

利用(扩充)正弦定理,在满足等号两边(或是分式的分子与分母)齐次的情况下,可以快速在边与对应的正弦值之间相互切换.

跟踪演练③

$\triangle ABC$ 中,若 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan A}{\tan B}$,判断 $\triangle ABC$ 的形状并说明理由.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 若 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$,则边 $b=$ _____.
2. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ$, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$,则角 $B=$ _____.
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中,已知 $AB=10\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $BC=30$,则 $S_{ABCD}=$ _____.
4. 解三角形(边长精确到1 cm).
(1) $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, $c=10$ cm;
(2) $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, $c=20$ cm.
5. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=8$, $b=7$, $B=60^\circ$,求角 C 的正弦值.

学习目标

1. 理解余弦定理及其推导过程.
2. 会运用正弦定理、余弦定理解斜三角形.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 的常见变形:

- (1) $\sin A : \sin B : \sin C = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (4) $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$.

「问题1」正弦定理的变形公式有什么用处?

预习导学

余弦定理

余弦定理	公式表达	$a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
	语言叙述	三角形中任意一边的平方等于 <u> </u>
	推论	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

「问题2」余弦定理何时成立? 它揭示了怎样的关系? 主要有什么作用?

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 已知三角形的三边解三角形

【例1】在 $\triangle ABC$ 中,若 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$,求 A, B, C .

规律方法

已知三角形的三边解三角形的方法:(1)先利用余弦定理求出一个角的余弦,从而求出第一个角;再利用余弦定理或由求得的第一个角,利用正弦定理求出第二个角;最后利用三角形的内角和定理求出第三个角.(2)利用余弦定理求三个角的余弦,进而求出三个角.

跟踪演练①

在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=7, b=8, c=13$,则角 C 的大小为 .

要点二 已知三角形的两边及其夹角解三角形

【例2】在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=8, B=60^\circ, c=4(\sqrt{3}+1)$. 解此三角形.

规律方法

已知三角形的两边及其夹角解三角形的方法:先利用余弦定理求出第三边,其余角的求解有两种思路,一是利用余弦定理的推论求出其余角,二是利用正弦定理求解(已知两边和一边的对角).若用正弦定理求解,需对角的取值进行取舍,而用余弦定理就不存在这些问题,在 $(0^\circ, 180^\circ)$ 上,余弦值所对应角的值是唯一的,故用余弦定理求解较好.

跟踪演练 2

在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=2\sqrt{2}, b=2\sqrt{3}, C=15^\circ$,解此三角形.

要点三 利用正、余弦定理判断三角形形状

【例 3】在 $\triangle ABC$ 中,若 $b=a\cos C$,试判断该三角形的形状.

规律方法

判断三角形的形状,可以从三个内角的关系入手,从条件出发,利用正弦定理进行代换、转化出角与角的关系或大小,从而作出准确判断.判断三角形的形状,主要看其是否是正三角形、等腰三角形、直角三角形、钝角三角形或锐角三角形,要特别注意“等腰直角三角形”与“等腰三角形或直角三角形”的区别.

跟踪演练 3

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$,且 $\sin A = 2\sin B \cos C$.试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【例 4】在 $\triangle ABC$ 中,若 $a\cos A + b\cos B = c\cos C$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

规律方法

判断三角形的形状应围绕三角形的边角关系进行思考,可用正、余弦定理将已知条件转化为边边关系,通过因式分解、配方等方式得出边的相应关系,从而判断三角形的形状.

跟踪演练 4

在 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos A = \frac{\sin B}{\sin C}$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $B=2A, a:b=1:\sqrt{3}$,则 $A=$ _____.
2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = \sin^2 C$,则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.
3. 以下关于正弦定理或其变形的叙述错误的是()
 - A. 在 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$
 - B. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin 2A = \sin 2B$,则 $a=b$
 - C. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin A > \sin B$,则 $A > B$,若 $A > B$,则 $\sin A > \sin B$ 都成立
 - D. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边,且 $c=2, C=\frac{\pi}{3}$.
 - (1)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,求 a, b 的值;
 - (2)若 $\sin B = 2\sin A$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

第3课时

反三角运算

学习目标

1. 理解反三角符号的意义.
2. 会用反三角符号正确表示相应区域内的角.
3. 掌握有关反三角运算的相关恒等式.

温故知新 WENGU ZHIXIN

知识链接

$$1. \sin \frac{\pi}{6} = \underline{\hspace{2cm}}, \cos \frac{\pi}{4} = \underline{\hspace{2cm}}, \tan \frac{\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \text{若 } \sin x = \frac{1}{2}, x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\text{若 } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\text{若 } \tan x = \sqrt{3}, x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

预习导学

1. $\arcsin x (x \in [-1, 1])$ 表示一个在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 范围中, 且正弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$\arccos x (x \in [-1, 1])$ 表示一个在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 范围中, 且余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$\arctan x (x \in \mathbf{R})$ 表示一个在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 范围中, 且正切值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$2. \sin(\arcsin x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [-1, 1],$$

$$\arcsin(\sin x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$\arcsin(-x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [-1, 1].$$

$$\cos(\arccos x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [-1, 1];$$

$$\arccos(\cos x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [0, \pi];$$

$$\arccos(-x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in [-1, 1];$$

$$\tan(\arctan x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \mathbf{R};$$

$$\arctan(\tan x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$$

$$\arctan(-x) = \underline{\hspace{2cm}}, x \in \mathbf{R}.$$

课堂讲义 KETANG JIANGYI

要点一 求反三角的值

【例1】求下列反三角的值:

$$(1) \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2});$$

$$(2) \arctan 1;$$

$$(3) \arccos \frac{1}{2}.$$

规律方法

求反三角运算的值时, 注意特殊角的三角函数值的记忆. 另外, 注意结合各自符号所限制的范围寻找适合的角.

跟踪演练1

下列各式中有哪几个成立? 为什么?

$$\textcircled{1} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}; \textcircled{2} \arcsin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\textcircled{3} \arcsin(-\frac{\pi}{3}) = -\arcsin \frac{\pi}{3};$$

$$\textcircled{4} \sin(\arcsin \sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

$$\textcircled{5} \sin(\arcsin \frac{\pi^2}{10}) = \frac{\pi^2}{10}.$$

要点二 利用反三角符号表示的角

【例2】已知 $\sin x = \frac{2}{3}$, 分别根据下列要求用反正弦函数值的形式表示 x .

(1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; (2) $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

规律方法

用反正弦函数值表示角时,若自变量 x 在范围内,则可直接表示;若自变量 x 不在反正弦的值域范围内,需利用诱导公式构造一个含 x 的代数式,使其正弦值恰好为已知值,且落在反正弦函数的值域范围内.

跟踪演练 2

已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ 且 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 求 α 的值.

要点三 反正弦符号的意义

【例3】求使得代数式 $2\arcsin \frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}$ 有意义的 x 的取值集合以及该代数式的取值集合.

规律方法

研究反三角运算的意义与取值范围问题,应首先将内层对象视为整体,根据反三角的定义,利用换元的思想,对该整体列式.将原代数式转化为反三角的本身问题,然后结合其要求与性质求解.

跟踪演练 3

求使得代数式 $\arccos(x^2+x)$ 有意义的 x 的取值集合以及该代数式的取值集合.

当堂检测 DANGTANG JIANCE

1. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ _____.
2. 已知 $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin(2x+1)$, 则 $x =$ _____.
3. 方程 $(3\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0, x \in [0, 2\pi)$ 的解集为 _____.
4. 用反正弦形式表示下列各角:
(1) $\sin x = \frac{1}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
(2) $\tan x = -\frac{1}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

第4课时 解三角形在实际问题中的应用

学习目标

能够综合运用正弦定理、余弦定理及其变形公式解决简单的实际问题.

温故知新

知识链接

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 14$, $b = 7\sqrt{6}$, $B = 60^\circ$, 则 $C =$ _____.
- 如果等腰三角形的周长是底边长的 5 倍, 那么它的顶角的余弦值为 _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, 则边 $c =$ _____.

预习导学

实际测量中的有关名称、术语

名称	定义	图示
基线	在测量上, 根据测量需要适当确定的线段叫做基线	
仰角	在同一铅垂平面内, 视线在水平线上方时与水平线的夹角	
俯角	在同一铅垂平面内, 视线在水平线下方时与水平线的夹角	
方向角	从指定方向线到目标方向线的水平角 (指定方向线是指正北或正南或正东或正西, 方向角小于 90°)	
方位角	从正北的方向线按顺时针方向到目标方向线所转过的水平角	

「问题」解三角形实际问题的一般步骤是什么?

课堂讲义

KETANG JIANGYI

要点一 测量距离问题

【例 1】如图所示, 湖面上甲、乙、丙三艘船沿着同一条直线航行, 某一时刻, 甲船在最前面的 A 点处, 乙船在中间 B 点处, 丙船在最后面的 C 点处, 且 $BC : AB = 3 : 1$. 一架无人机在空中的 P 点处对它们进行数据测量, 在同一时刻测得 $\angle APB = 30^\circ$, $\angle BPC = 90^\circ$ (船只与无人机的大小及其他因素忽略不计).

- (1) 求此时无人机到甲、丙两船的距离之比;
- (2) 若此时甲、乙两船相距 100 米, 求无人机到丙船的距离 (精确到 1 米).

规律方法

解决距离问题的关键是先根据题意作出图形, 再根据条件的集中程度选择合适的三角形逐步求解.

跟踪演练 ①

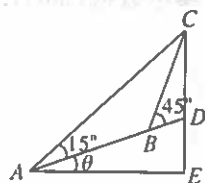
某观测站 C 在城 A 的南偏西 20° 方向, 由城 A 出发的一条公路, 走向是南偏东 40° , 在 C 处测得公路上 B 处有一人, 距 C 为 31km , 正沿公路向 A 城走去, 走了 20km 后到达 D 处, 此时 CD 间的距离为 21km , 问: 这人还要走多少千米才能到达 A 城?

规律方法

在测量高度时, 要理解仰角和俯角的概念, 区别在于视线在水平线的上方还是下方. 一般步骤是: (1) 根据已知条件画出示意图; (2) 分析与问题有关的三角形; (3) 运用正、余弦定理, 有序地解相关的三角形, 逐步求解; (4) 把解出的答案还原到实际问题中.

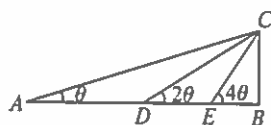
跟踪演练 ②

如图所示, 在斜度一定的山坡上的一点 A 测得山顶上一建筑物顶端 C 对于山坡的斜度为 15° , 向山顶前进 100 米后到达点 B , 又从点 B 测得斜度为 45° , 建筑物的高 CD 为 50 米. 求此山对于地平面的倾斜角 θ 的余弦值.



要点二 测量高度问题

【例 2】在塔底的水平面上某点测得塔顶的仰角为 θ , 由此点向塔底沿直线行走 30 米, 测得塔顶的仰角为 2θ , 再向塔前进 $10\sqrt{3}$ 米, 又测得塔顶的仰角为 4θ , 求塔高.



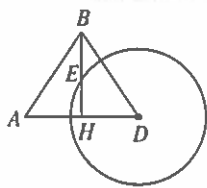
要点三 测量角度问题

【例3】如图,我海监船在D岛海域例行维权巡航,某时刻航行至A处,此时测得其北偏东 30° 方向与它相距20海里的B处有一外国船只,且D岛位于海监船正东18海里处.

(1)求此时该外国船只与D岛的距离;

(2)观测中发现,此外国船只正以每小时4海里的速度沿正南方航行.为了将该船拦截在离D岛12海里的E处(E在B的正南方向),不令其进入D岛12海里内的海域,试确定海监船的航向,并求其速度的最小值(角度精确到 0.1° ,速度精确到0.1海里/小时,

参考数据: $\tan 41.8^\circ \approx \frac{2\sqrt{5}}{5}$).



规律方法

本题应首先理解方位角的概念,然后作出示意图,利用等量关系列方程求解即可,最后回答行驶的方向时,要注意正确描述方位角.

跟踪演练③

在南海伏季休渔中,我渔政船甲在A处观测到一外国偷渔船乙在我船北偏东 60° 的方向,相距 a 海里的B处,偷渔船正在向北行驶,若我船速度是渔船速度的 $\sqrt{3}$ 倍,问我船应沿什么方向前进才能追上渔船?此时渔船已行驶多少海里?



1. 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离相等. 灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 40° , 灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60° , 则灯塔 A 在灯塔 B 的_____.
2. 一船以 $22\sqrt{6}$ km/h 的速度向正北航行, 在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 45° , 1 小时 30 分后航行到 B 处, 在 B 处看灯塔 S 在船的南偏东 15° , 则灯塔 S 与 B 之间的距离为_____.
3. 从观测点 A 看湖泊两岸的建筑物 B 和 C 的视角为 60° , $AB=100$ m, $AC=200$ m, 则 B, C 相距_____.
4. 一艘轮船在江中向正东方向航行, 在点 P 观测到灯塔 A, B 在一直线上, 并与航线成角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 轮船沿航线前进 b 米到达 C 处, 此时观测到灯塔 A 在北偏西 45° 方向, 灯塔 B 在北偏东 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 方向, $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$, 求 CB (结果用 α, β, b 表示).

5. 甲船在 B 岛的正南 A 处, $AB=10$ km, 甲船以 4 km/h 的速度向正北航行, 同时, 乙船自 B 岛出发以 6 km/h 的速度向北偏东 60° 的方向驶去, 当甲、乙两船相距最近时, 它们航行的时间是多少?

任意角及其度量	任意角	定义:平面内由一条射线绕着其端点从初始位置(始边)旋转到终止位置(终边)所形成的图形
		分类 $\left\{\begin{array}{l} \text{正角:逆时针} \\ \text{负角:顺时针} \\ \text{零角:不旋转} \end{array}\right.$
	弧度制	象限角:角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,那么,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限的角
		与角 α 终边重合的角: $\{\beta \beta=\alpha+k\cdot 360^{\circ}, k\in\mathbb{Z}\}$ 或 $\{\beta \beta=\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
任意角的三角比	1 弧度:弧长等于半径的弧所对的圆心角	
	弧度数公式: $ \alpha =\frac{l}{r}$;弧长公式: $l=ar$;扇形面积公式: $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}ar^2$	
同角三角比的关系	角度与弧度转化关系:角度数 $\times\frac{\pi}{180}\text{rad}=\text{弧度数}$	
	在角 α 终边上任取一点 $P(x, y)$, $ OP =r$, 则 $r=\sqrt{x^2+y^2}(r>0)$	
	我们规定: $\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}$, $\sec\alpha=\frac{r}{x}$, $\csc\alpha=\frac{r}{y}$, $\cot\alpha=\frac{x}{y}$	
三角恒等变换	平方关系: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$, $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$	
	商数关系: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha\neq 0)$; $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\sin\alpha\neq 0)$	
	倒数关系: $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$, $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$, $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$	
	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$; $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$; $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$	
诱导公式	$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$; $\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$; $\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$; $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$; $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$; $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$	
	正、余弦定理	
正弦定理: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$		
余弦定理: $a^2=b^2+c^2-2bccos A$, $b^2=a^2+c^2-2accos B$, $c^2=a^2+b^2-2abcos C$ $cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$		

一、同角三角比的关系式及诱导公式

牢记两个基本关系式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 及 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$, 并能应用两个关系式进行三角比的求值、化简、证明. 在应用中, 要注意掌握解题的技巧, 同时要体会数学思想方法如数形结合思想、分类讨论思想、转化与化归思想及函数与方程思想的应用.

诱导公式可概括为 $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的各三角比值的化简公式. 记忆规律是: 奇变偶不变, 符号看象限. 其中的奇、偶是指 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍或偶数倍, 变与不变是指函数名称的变化. 若是奇数倍, 则函数名称变为相应的异名函数 (即正余互变); 若是偶数倍, 则函数名称不变. 符号看象限是指把 α 看成锐角时原函数值的符号作为结果的符号.

【例 1】已知 $\frac{2 + \tan(\theta - \pi)}{1 + \tan(2\pi - \theta)} = -4$, 求 $(\sin \theta - 3\cos \theta) \cdot (\cos \theta - \sin \theta)$ 的值.

跟踪演练 ①

已知 $f(\alpha) = \frac{\sin^2(\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha) \cdot \tan(-\pi + \alpha)}{\sin(-\pi + \alpha) \cdot \tan(-\alpha + 3\pi)}$.

- (1) 化简 $f(\alpha)$;
- (2) 若 $f(\alpha) = \frac{1}{8}$, 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值;
- (3) 若 $\alpha = -\frac{47}{4}\pi$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

二、三角求值

三角求值主要有三种类型,即:

(1)“给角求值”,一般给出的角都是非特殊角,从表面看较难,但仔细观察就会发现这类问题中的角与特殊角都有一定的关系,如和或差为特殊角,当然还有可能需要运用诱导公式.

(2)“给值求值”,即给出某些角的三角式的值,求另外一些三角比的值,这类求值问题关键在于结合条件和结论中的角,合理拆、配角.当然在这个过程中要注意角的范围.

(3)“给值求角”,本质上还是“给值求值”,只不过往往求出的是特殊角的值,在求出角之前要讨论角的范围.

【例2】试求 $\sqrt{3}\tan 10^\circ + 4\sin 10^\circ$ 的值.

三、三角恒等式的证明

三角恒等式的证明主要是利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 、

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 、二倍角公式等结论证明等式成立.一般思路是从左向右或两头凑,注意函数名的统一,一般是切化弦.

【例3】求证: $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{2(3 + \cos 4x)}{1 - \cos 4x}$.

跟踪演练③

求证: $\frac{(\sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1)}{\sin 2x} = \tan \frac{x}{2}$.

跟踪演练②

化简: $\frac{3}{\sin^2 40^\circ} - \frac{1}{\cos^2 40^\circ}$.

四、正弦定理、余弦定理在解三角形中的应用

应用正、余弦定理解题时,要熟练、准确地进行三角恒等变换,同时应注意三角形的一些隐含条件.转化与化归的思想是解决解三角形问题的基本思路.

【例4】在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 且 $4\sin^2 \frac{A+C}{2} - \cos 2B = \frac{7}{2}$.

(1)求角 B 的度数;

(2)若 $b = \sqrt{3}, a+c=3$,且 $a > c$,求 a, c 的值.

跟踪演练④

已知 k 是整数,钝角三角形 ABC 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

(1)若方程 $x^2 - 2kx + 3k^2 - 7k + 3 = 0$ 有实根,求 k 的值;

(2)对于(1)中的 k 值,若 $\sin C = \frac{k}{\sqrt{2}}$,且有关系式 $(c-b) \cdot \sin^2 A + b \sin^2 B = c \sin^2 C$,试求角 A, B, C 的度数.



名教联盟

